宁夏中卫市第一中学 2024 年高三考前热身数学试卷

注意事项：

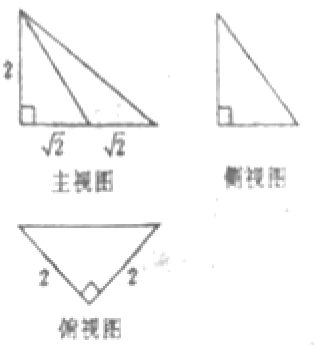
1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．某几何体的三视图如右图所示,则该几何体的外接球表面积为(　　)



A．12π　　　　B．16π

C．24π　　　　D．48π

2．在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，四面体 $OABC$ 各顶点坐标分别为：

$O(0,0,0),A(0,0,2),B\left(\frac{2}{3}\sqrt{3},0,0\right),C\left(0,\frac{2}{3}\sqrt{3},0\right)$．假设蚂蚁窝在 O 点，一只蚂蚁从 O 点出发，需要在 AB，AC 上分别任意选择一点留下信息，然后再返回 O 点．那么完成这个工作所需要走的最短路径长度是（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{11-\sqrt{21}}$　　C．$\sqrt{5+\sqrt{21}}$　　D．$2\sqrt{3}$

3．已知 ΔABC 是边长为 1 的等边三角形，点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 $DE=2EF$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为（　　）

A．$\frac{11}{8}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{8}$

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, x\le 1\\ \ln x, x>1\end{cases}$，若 $f(a)>f(b)$，则下列不等关系正确的是（　　）

A．$\frac{1}{a^2+1}<\frac{1}{b^2+1}$　　　　B．$\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$

C．$a^2<ab$　　　　D．$\ln\left(a^2+1\right)>\ln\left(b^2+1\right)$

5．

某装饰公司制作一种扇形板状装饰品，其圆心角为 **120°**，并在扇形弧上正面等距安装 **7** 个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个，导线接头忽略不计)，已知扇形的半径为 **30** 厘米，则连接导线最小大致需要的长度为（　　）

A．58 厘米　　**B．63** 厘米　　**C．69** 厘米　　**D．76** 厘米

6．在 ΔABC 中，$C=30^{\circ}$，$\cos A=-\frac{2}{3}$，$AC=\sqrt{15}-2$，则 AC 边上的高为（　　）

A． $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　**B．2**　　**C．** $\sqrt{5}$　　**D．** $\frac{\sqrt{15}}{2}$

7．已知函数 $f\left(x\right)=\sin(2x+\varphi)$，其中 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，若 $\forall x\in R,f(x)\leq\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 恒成立，则函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为（　　）

A． $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in z)$　　**B．** $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in z)$

C． $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in z)$　　**D．** $\left[k\pi,k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in Z)$

8．中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题；“三百七十八里关，初行健步不为难，次后脚痛递减半，六朝才得到其关，要见每朝行里数，请公仔细算相还.”其意思为：“有一个人走了 **378** 里路，第一天健步走行，从第二天起脚痛每天走的路程是前一天的一半，走了 **6** 天后到达目的地，求该人每天走的路程.”由这个描述请算出这人第四天走的路程为（　　）

A．6 里　　**B．12** 里　　**C．24** 里　　**D．48** 里

9．设集合 $M=\left\{x\middle|1<x\leq 2\right\}$，$N=\left\{x\middle|x<a\right\}$，若 $M\cap N=M$，则 a 的取值范围是（　　）

A． $\left(-\infty,1\right)$　　**B．** $\left(-\infty,1\right]$　　**C．** $\left(2,+\infty\right)$　　**D．** $\left[2,+\infty\right)$

10．已知 $A\left(x_A,y_A\right)$ 是圆心为坐标原点 O，半径为 **1** 的圆上的任意一点，将射线 OA 绕点 O 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 到 OB 交圆于点 $B\left(x_B,y_B\right)$，则 $2y_A+y_B$ 的最大值为（　　）

A．3　　**B．2**　　**C．** $\sqrt{3}$　　**D．** $\sqrt{5}$

11．在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A． $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　**B．** $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C． $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　**D．** $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

12．已知复数 z＝（$1+2i$）（$1+ai$）（$a\in R$），若 $z\in R$，则实数 a＝（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　　　B．$-\frac{1}{2}$　　　　　　C．2　　　　　　D．﹣2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=(x^2+1)e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为__．

14．函数 $f\left(x\right)=x\cos x+\sin x$ 在 $x=\pi$ 处的切线方程是___________．

15．定义在 R 上的奇函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right)$，并且当 $0\le x\le 1$ 时 $f\left(x\right)=2^x-1$，则 $f\left(123\right)=$___

16．3 张奖券分别标有特等奖、一等奖和二等奖．甲、乙两人同时各抽取 1 张奖券,两人都未抽得特等奖的概率是__________．

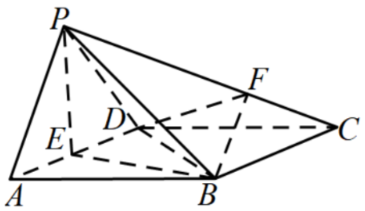
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(12 分)设数列 $\left\{a_n\right\}$，其前 n 项和 $S_n=-3n^2$，又 $\left\{b_n\right\}$ 单调递增的等比数列，　$b_1b_2b_3=512$，$a_1+b_1\ =a_3+b_3$．

(Ⅰ)求数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

(Ⅱ)若 $c_n=\dfrac{b_n}{\left(b_n-2\right)\left(b_n-1\right)}$，求数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n，并求证：$\frac{2}{3}\le T_n<1$．

18．(12 分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60°$，$\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形，$PC=\sqrt{10}$，E 为线段 AD 的中点．



$\left(1\right)$ 求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PBE；

$\left(2\right)$ 是否存在满足 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{FC}\left(\lambda>0\right)$ 的点 F，使得 $V_{B-PAE}=\frac{3}{4}V_{D-PFB}$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由．

19．(12 分)如图 1，在等腰梯形 ABF_1F_2 中，两腰 $AF_2=BF_1=2$，底边 $AB=6$，$F_1F_2=4$，D，C 是 AB 的三等分点，E 是 F_1F_2 的中点.分别沿 CE，DE 将四边形 $BCEF_1$ 和 $ADEF_2$ 折起，使 F_1，F_2 重合于点 F，得到如图 2 所示的几何体.在图 2 中，M，N 分别为 CD，EF 的中点.

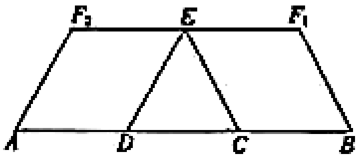


图 1

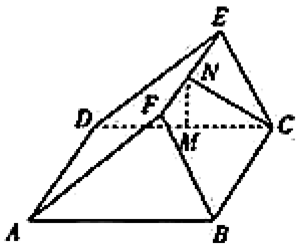


图 2

（1）证明：$MN \perp$ 平面 $ABCD$．

（2）求直线 CN 与平面 ABF 所成角的正弦值.

20．（12 分）在创建“全国文明卫生城”过程中，运城市“创城办”为了调查市民对创城工作的了解情况，进行了一次创城知识问卷调查(一位市民只能参加一次)，通过随机抽样，得到参加问卷调查的100人的得分统计结果如表所示：．

组别	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
频数	2	12	20	25	24	13	4

（1）由频数分布表可以大致认为，此次问卷调查的得分 $Z-N\left(\mu,198\right)$，μ 似为这100人得分的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)，利用该正态分布，求 $P(38.2<Z\le 80.2)$；

（2）在（1）的条件下，“创城办”为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案：

①得分不低于 μ 的可以获赠2次随机话费，得分低于 μ 的可以获赠1次随机话费；

②每次获赠的随机话费和对应的概率为：

赠送话费的金额(单位：元)	20	50
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

现有市民甲参加此次问卷调查，记 X (单位：元)为该市民参加问卷调查获赠的话费，求 X 的分布列与数学期望.

附：参考数据与公式：$\sqrt{198}\approx 14$，若 $X-N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P\left(\mu-\sigma<x\le\mu+\sigma\right)=0.6826$，

$P\left(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma\right)=0.9544$，$P\left(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma\right)=0.9974$

21．（12 分）已知函数 $f(x)=(x+2)\ln(x+1)-ax(a\in R)$

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\ge 0$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+3n-1$，$b_n=\dfrac{4}{a_n}$，求证：数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n<\ln(n+1)(n+2)$.

22.（10分）已知如图1，在 ***Rt△ABC*** 中，**∠*ACB*=30°**，**∠*ABC*=90°**，***D*** 为 ***AC*** 中点，***AE***⊥***BD*** 于 ***E***，延长 ***AE*** 交 ***BC*** 于 ***F***，将 ***△ABD*** 沿 ***BD*** 折起，使平面 ***ABD***⊥平面 ***BCD***，如图 **2** 所示。

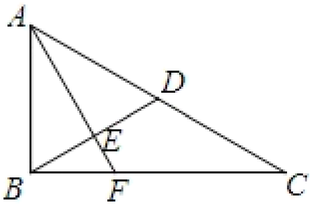


图 1

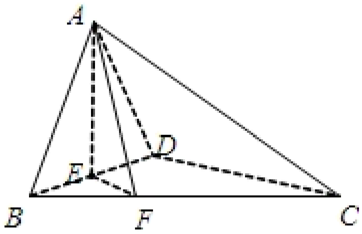


图 2

（Ⅰ）求证：***AE***⊥平面 ***BCD***；

（Ⅱ）求二面角 ***A-DC-B*** 的余弦值；

（Ⅲ）求三棱锥 ***B-AEF*** 与四棱锥 ***A-FEDC*** 的体积的比（只需写出结果，不要求过程）.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**A**

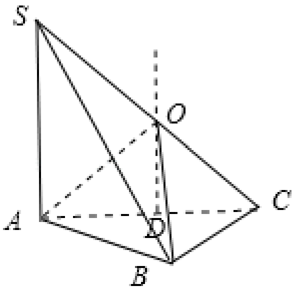
【解析】

由三视图知：几何体为三棱锥，且三棱锥的一条侧棱垂直于底面，结合直观图判断外接球球心的位置，求出半径，代入求得表面积公式计算.

【详解】

由三视图知：几何体为三棱锥，且三棱锥的一条侧棱垂直于底面，高为 **2**，

底面为等腰直角三角形，斜边长为$2\sqrt{2}$，如图：



∴ΔABC 的外接圆的圆心为斜边 AC 的中点 D，$OD \perp AC$，且 $OD \subset$ 平面 SAC，

Q $SA = AC = 2$，

$\therefore SC$ 的中点 O 为外接球的球心，

$\therefore$ 半径 $R = \sqrt{3}$，

$\therefore$ 外接球表面积 $S = 4\pi \times 3 = 12\pi$.

故选：**A**

【点睛】

本题考查了由三视图求几何体的外接球的表面积，根据三视图判断几何体的结构特征，利用几何体的结构特征与数据求得外接球的半径是解答本题的关键.

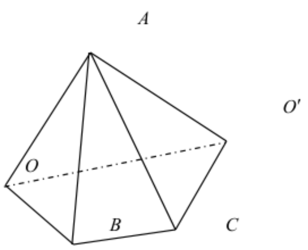
2、**C**

【解析】

将四面体 $OABC$ 沿着 OA 劈开，展开后最短路径就是 $\triangle AOO'$ 的边 OO'，在 $\triangle AOO'$ 中，利用余弦定理即可求解.

【详解】

将四面体 $OABC$ 沿着 OA 劈开，展开后如下图所示：



最短路径就是 $\triangle AOO'$ 的边 OO' .

易求得 $\angle OAB = \angle O'AC = 30°$，

由 $AO = 2$，$OB = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 知 $AB = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

$AC = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$，$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

$$\Rightarrow \cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{\frac{16}{3}+\frac{16}{3}-\frac{8}{3}}{2\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{4}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{4}$$

由余弦定理知$OO'^2=AO^2+AO'^2-2AO\cdot AO'\cdot\cos\angle OAO'$

其中$AO=AO'=2$，$\cos\angle OAO'=\cos\left(60^\circ+\angle BAC\right)=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$

$\therefore OO'^2=5+\sqrt{21},\Rightarrow OO'=\sqrt{5+\sqrt{21}}$

故选：C

【点睛】

本题考查了余弦定理解三角形，需熟记定理的内容，考查了学生的空间想象能力，属于中档题.

3、**D**

【解析】

设$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，作为一个基底，表示向量$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{3}{4}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$，然后再用数量积公式求解.

【详解】

设$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，

所以$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{3}{4}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$，

所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{b}\cdot\vec{b}=\frac{1}{8}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查平面向量的基本运算，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

4、**B**

【解析】

利用函数的单调性得到a,b的大小关系，再利用不等式的性质，即可得答案.

【详解】

$\because f(x)$在$\boldsymbol{R}$上单调递增，且$f(a)>f(b)$，$\therefore a>b$.

$\because a,b$ 的符号无法判断，故 a^2 与 b^2， a^2 与 ab 的大小不确定，

对 **A**，当 $a=1,b=-1$ 时，$\dfrac{1}{a^2+1}=\dfrac{1}{b^2+1}$，故 **A** 错误；

对 **C**，当 $a=1,b=-1$ 时，$a^2=1,ab=-1$，故 **C** 错误；

对 **D**，当 $a=1,b=-1$ 时，$\ln\left(a^2+1\right)=\ln\left(b^2+1\right)$，故 **D** 错误；

对 **B**，对 $a>b$，则 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$，故 B 正确.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查分段函数的单调性、不等式性质的运用，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，属于基础题.

5、**B**

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小，可将导线的长视为扇形弧长，利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 **6** 等分，

所以每部分的弦长和弧长相差很小，可以用弧长近似代替弦长，

故导线长度约为 $\dfrac{2\pi}{3}\times 30=20\pi\approx$ **63(厘米).**

故选：B.

【点睛】

本题主要考查了扇形弧长的计算，属于容易题.

6、**C**

【解析】

结合正弦定理、三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，求得 BC 边长，由此求得 AC 边上的高.

【详解】

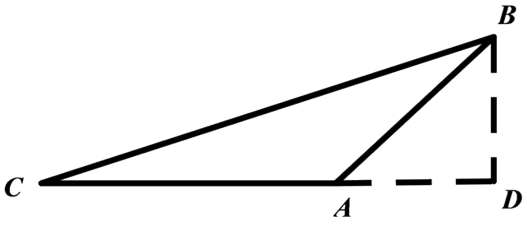
过 B 作 $BD\perp CA$，交 CA 的延长线于 D.由于 $\cos A=-\dfrac{2}{3}$，所以 A 为钝角，且 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，所以

$\sin\angle CBA=\sin\left(\pi-\angle CBA\right)=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{15}-2}{6}$.在三角形

ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{BC}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{15}-2}{\frac{\sqrt{15}-2}{6}}$，所以 $BC=2\sqrt{5}$.在 $Rt\Delta BCD$ 中有

$BD=BC\sin C=2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\sqrt{5}$，即 AC 边上的高为 $\sqrt{5}$.

故选：C



【点睛】

本小题主要考查正弦定理解三角形，考查三角形的内角和定理、两角和的正弦公式，属于中档题.

7、A

【解析】

$\forall x\in R, f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|\Rightarrow f(x)_{\max}=\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|=1$，从而可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，再解不等式

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$ 即可.

【详解】

由已知，$f(x)_{\max}=\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\right|=1$

$\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1,\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$，

解得，$k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in z)$.

故选：A.

【点睛】

本题考查求正弦型函数的单调区间，涉及到恒成立问题，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

8、C