

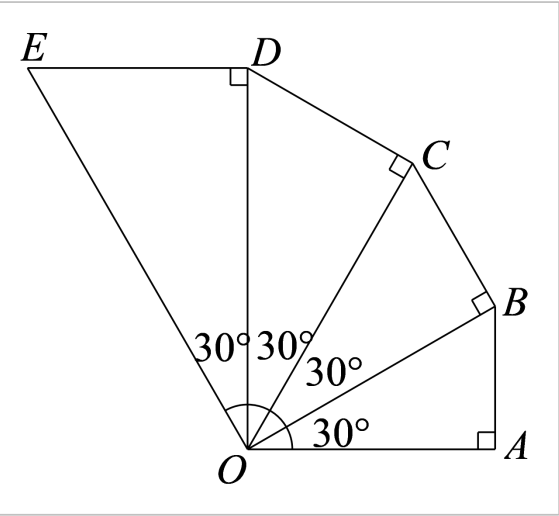
云南省昆明市 2024 届高三“三诊一模”摸底诊断测试数学
试题

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、单选题

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 6\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)$ ()
A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2, 3, 5\}$ C. $\{1, 3, 5\}$ D. $\{3, 4, 5\}$
2. 复数 $\frac{i}{2-i}$ 在复平面内对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知 F 是抛物线 $C : x^2 = 4y$ 的焦点, 点 M 在 C 上, 且 M 的纵坐标为 3 , 则 $|MF|$ ()
A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. 4
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{DB}$, 则 ()
A. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ B. $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$
C. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$ D. $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$
5. 某学校运动会男子 100m 决赛中, 八名选手的成绩 (单位: s) 分别为: 13.09, 13.15, 12.90, 13.16, 12.96, 13.11, x , 13.24, 则下列说法错误的是 ()
A. 若该八名选手成绩的第 75% 百分位数为 13.155, 则 $x > 13.15$
B. 若该八名选手成绩的众数仅为 13.15, 则 $x > 13.15$
C. 若该八名选手成绩的极差为 0.34, 则 $12.90 < x < 13.24$
D. 若该八名选手成绩的平均数为 13.095, 则 $x > 13.15$
6. 已知函数 $f(x) = \sin x - \cos x$, 若存在 $x \in [0, 2\pi]$ 使得方程 $f(x) = m$ 有三个不等的实根 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $x_3 - x_2 - x_1$ ()
A. 2π B. $\frac{3\pi}{2}$ C. π D. $\frac{\pi}{2}$
7. 若将函数 $y = f(x)$ 的图象平移后能与函数 $y = g(x)$ 的图象重合, 则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为“平行函数” 已知 $f(x) = 2 - \frac{1}{2^x - 1}$, $g(x) = \frac{m \cdot 2^x}{2^x - 2}$ 互为“平行函数”, 则 m ()
A. 2 B. 1 C. -1 D. -2
8. 第七届国际数学大会 (ICME7) 的会徽图案是由若干三角形组成的. 如图所示, 作 $Rt\triangle AOB$, $OA = 1$, $\angle AOB = 30^\circ$, 再依次作相似三角形 $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOE$,, 直至最后一个三角形的斜边 OM 与 OA 第一次重叠为止. 则所作的所有三角形的面积和

为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}^{11} - 1$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}^{11} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}^{12} - 1$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}^{12} - 1$

二、多选题

9. 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 BD_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$ ，底面 $ABCD$ 是正方形，则（ ）

- A. $AA_1 = \sqrt{2}AB$ B. BD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$
C. $BD_1 \perp DA_1$ D. $AB_1 \perp$ 平面 BCD_1

10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ ，直线 $l: x + y - 4 = 0$ ，点 P 在直线 l 上运动，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 A, B ，当 $\angle APB$ 最大时，则（ ）

- A. 直线 AB 的斜率为 1 B. 四边形 $PAOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$
C. $|AB| = \frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\sin \angle APB = \frac{\sqrt{7}}{8}$

11. 古希腊数学家托勒密 (Ptolemy 85-165) 对三角学的发展做出了重要贡献，他研究出角与弦之间的对应关系，创造了世界上第一张弦表.托勒密用圆的半径的 $\frac{1}{60}$ 作为一个度量单位来度量弦长，将圆心角 θ ($0^\circ < \theta < 360^\circ$) 所对的弦长记为 $\text{crd } \theta$.例如 60° 圆心角所对弦长等于 60 个度量单位，即 $\text{crd}60^\circ = 60$.则（ ）

- A. $\text{crd}30^\circ = 30$
B. 若 $\text{crd } \theta = 120$ ，则 $\theta = 180^\circ$
C. $\text{crd } \theta = 60\sqrt{2(1 - \cos \theta)}$
D. $\text{crd } \theta = \text{crd } \alpha + \text{crd } \beta$ ($0^\circ < \theta < 360^\circ$)

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ ， $g(x) = f(f(x)) - f(x) - a$ ，则（ ）

- A．当 $a = 0$ 时， $g(x)$ 有 2 个零点

B．当 $a = \frac{3}{2}$ 时， $g(x)$ 有 2 个零点

C．存在 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 $g(x)$ 有 3 个零点

D．存在 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 $g(x)$ 有 5 个零点

三、填空题

- 13．已知角 α 的顶点为坐标原点 O ，始边与 x 轴的非负半轴重合，点 $A(1,a)$ ($a \in \mathbb{Z}$) 在角 α 终边上，且 $|OA| = 3$ ，则 $\tan \alpha$ 的值可以是_____．（写一个即可）

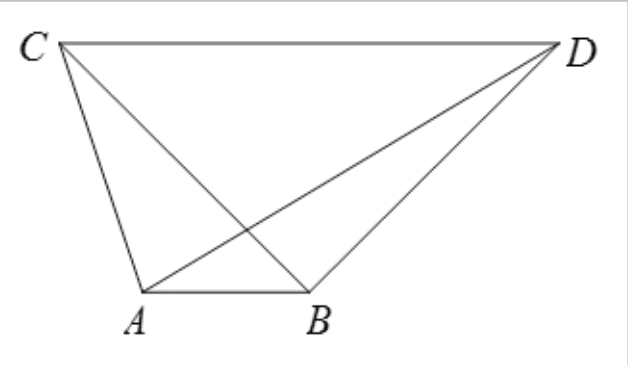
14．春节前夕，某社区安排小王、小李等 5 名志愿者到三个敬老院做义工，每个敬老院至少安排 1 人，至多安排 2 人.若小王、小李安排在同一个敬老院，且这 5 名志愿者全部安排完，则所有不同的安排方式种数为_____．（用数字作答）

15．已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，以 F_2 为圆心作与 C 的渐近线相切的圆，该圆与 C 的一个交点为 P ，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形，则 C 的离心率为_____．

16．已知球 O 的表面积为 36π ，正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，则该正四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为_____．

四、解答题

17．在 $\triangle ABC$ 中， $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ， $\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $AB = \sqrt{2}$ ．

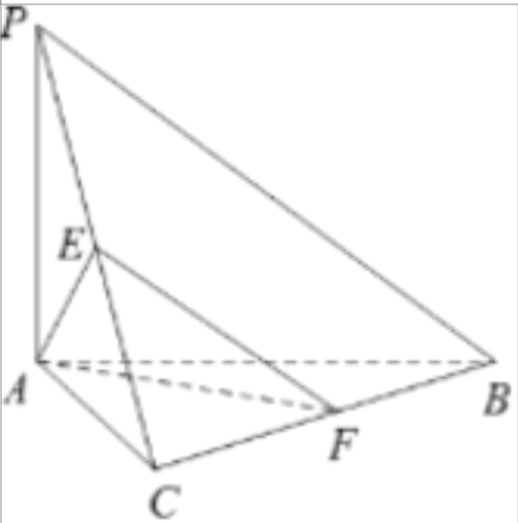


(1)求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2)如图， $CD \parallel AB$ ， $CB = BD$ ，求 AD ．

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{4}$.
- (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列, 求数列 $\{\frac{1}{d_n}\}$ 的前 2024 项和.

19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , E 是线段 PC 的中点, F 是线段 BC 上一点, $PA=AC=\frac{1}{2}BC=1$, $PB=\sqrt{6}$.



- (1)证明: 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC ;
- (2)是否存在点 F , 使平面 AEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 若存在, 求 CF ; 若不存在, 说明理由.

20. 聊天机器人 (chatterbot) 是一个经由对话或文字进行交谈的计算机程序. 当一个问题输入给聊天机器人时, 它会从数据库中检索最贴切的结果进行应答. 在对某款聊天机器人进行测试时, 如果输入的问题没有语法错误, 则应答被采纳的概率为 80%, 若出现语法错误, 则应答被采纳的概率为 30%. 假设每次输入的问题出现语法错误的概率为 10%.

(1) 求一个问题的应答被采纳的概率;

(2) 在某次测试中, 输入了 8 个问题, 每个问题的应答是否被采纳相互独立, 记这些应答被采纳的个数为 X , 事件 $X = k$ ($k = 0, 1, \dots, 8$) 的概率为 $P(X = k)$, 求当 $P(X = k)$ 最大时 k 的值.

21. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点, 点 $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在不过原点 O 的直线 l 上, l 交 C 于 A, B 两点. 当 $\angle AOF$ 与 $\angle BOF$ 互补时, $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $|AF| + |BF| = 2\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2)证明: $\frac{S_{\triangle AOB}}{\tan \angle AOB}$ 为定值.

22. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + \ln x - \frac{1}{2}x^2 - 2ax, a \in \mathbb{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $a > 0$ 时, 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}a^2 - 1 - \ln a$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

参考答案：

1. C

【分析】先求集合 B 的补集，再求交集即可.

【详解】由题 $\complement_U B = \{1, 3, 4, 5\}$ 则 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5\}$

故选：C

2. A

【分析】由复数的四则运算以及复数的几何意义即可得解.

【详解】由题意 $\frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+2i}{5}$ ，所以复数 $\frac{i}{2-i}$ 在复平面内对应的点为 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ ，

它在第一象限.

故选：A.

3. D

【分析】根据抛物线的焦半径公式即可求解.

【详解】由已知得 $F(0, 1)$ ，由于 M 的纵坐标为 3，结合抛物线定义可得

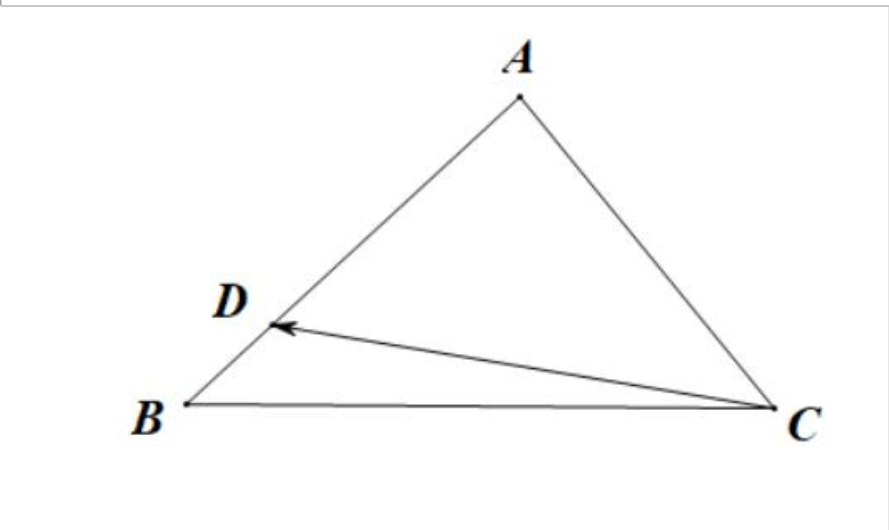
$$|MF| = y_M + \frac{p}{2} = 3 + \frac{2}{2} = 4,$$

故选：D

4. C

【分析】利用平面向量的加减法则，根据向量定比分点代入化简即可得出结果.

【详解】如下图所示：



易知 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$ ；

即可得 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$.

故选：C

5. A

【分析】举反例判断 A, 利用众数和平均数定义判断 B、D, 分情况讨论 x 判断 C.

【详解】对 A, 因为 $8 \times 75\% = 6$, 当 $x = 13$, 八名选手成绩从小到大排序

12.90, 12.96, 13, 13.09, 13.11, 13.15, 13.16, 13.24, 故这八名选手成绩的第 75% 百分位数为

$\frac{13.15 + 13.16}{2} = 13.155$, 但 $x = 13 < 13.15$, 故 A 错误;

对 B, 由众数是出现次数最多的数据, B 正确;

对 C, 当 $x = 12.9$, 极差为 $13.24 - x = 0.34$, 不符合题意舍去;

当 $12.90 < x < 13.24$, 极差为 $13.24 - 12.9 = 0.34$, 符合题意

当 $x = 13.24$, 极差为 $x - 12.9 = 0.34$ 不符合题意舍去, 综上, $12.90 < x < 13.24$, C 正确;

对 D, 平均数为 $\frac{12.90 + 12.96 + 13.09 + 13.11 + 13.15 + 13.16 + 13.24 + x}{8} = 13.095$, 解得 $x = 13.15$, 故 D 正确.

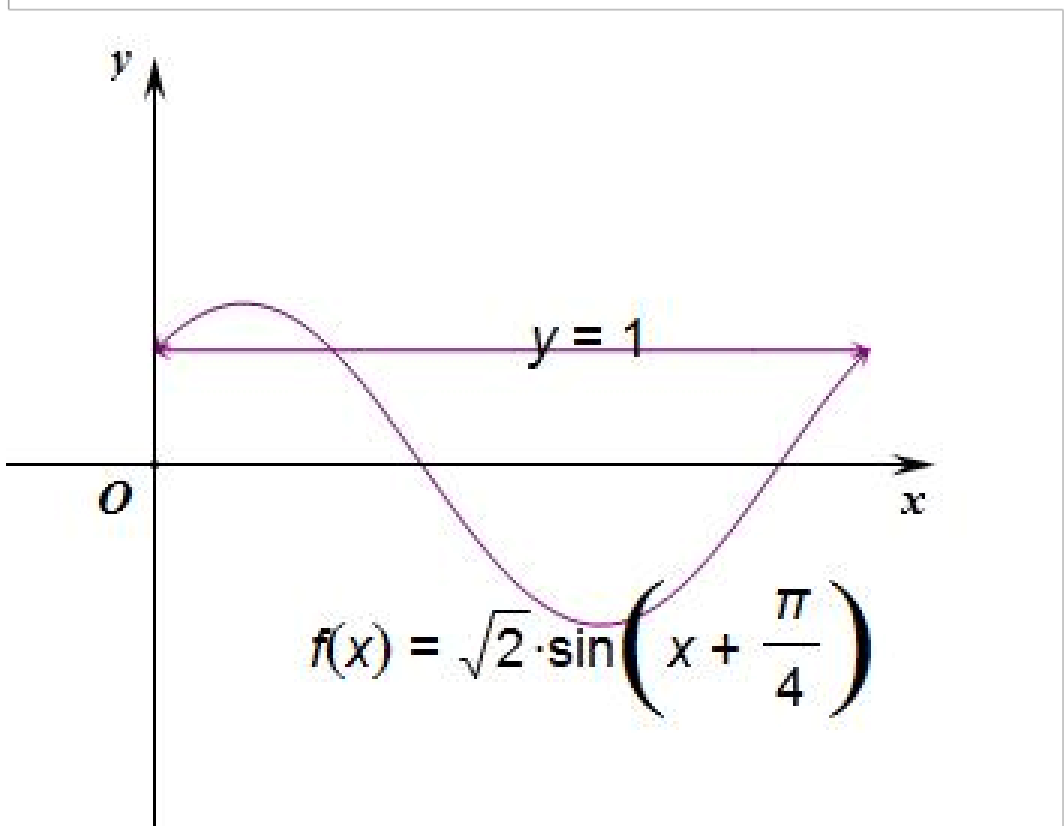
故选: A

6. B

【分析】利用辅助角公式变形为 $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 画出 $x \in [0, 2\pi]$ 图像, 找到两函数交点位置, 求出结果即可.

【详解】 $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 最小正周期为 2π ,

作出 $x \in [0, 2\pi]$ 的图像,



可知当 $m = 1$ 时, 有三个根,

所以 $\sqrt{2} \sin x = \frac{\pi}{4} = 1$,

即 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 或 $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得根分别为 $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$,

又因为 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3\pi}{2}$,

所以 $x_3 = \frac{3\pi}{2} - x_1 - x_2 = \frac{3\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{2} = \pi$,

故选：B.

7. B

【分析】根据“平行函数”的定义，结合函数图象的变换关系求解即可.

【详解】因为 $f(x) = 2 - \frac{1}{2^x - 1}$,

$$g(x) = \frac{m \cdot 2^x}{2^x - 2} = \frac{m \cdot 2^{x-1}}{2^{x-1} - 1} = \frac{m \cdot 2^{x-1} - 1 + 1}{2^{x-1} - 1} = m + \frac{1}{2^{x-1} - 1},$$

而将函数 $y = f(x)$ 的图象平移后能与函数 $y = g(x)$ 的图象重合，

所以 $m = 1$ ，经检验符合题意，

故选：B.

8. D

【分析】设第 $n (n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 12)$ 三角形的斜边长为 a_n ，面积为 b_n ，根据题意分析可知数列 $\{b_n\}$ 是以首项 $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列，结合等比数列求和公式运算求解.

【详解】因为 $\frac{360}{30} = 12$,

设第 $n (n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 12)$ 三角形的斜边长为 a_n ，面积为 b_n ，

由题意可知： $a_1 = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_n$ ， $b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a_n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} a_n^2$ ，

$$\text{则 } b_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} a_{n+1}^2}{\frac{\sqrt{3}}{8} a_n^2} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3},$$

可知数列 $\{b_n\}$ 是以首项 $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列，

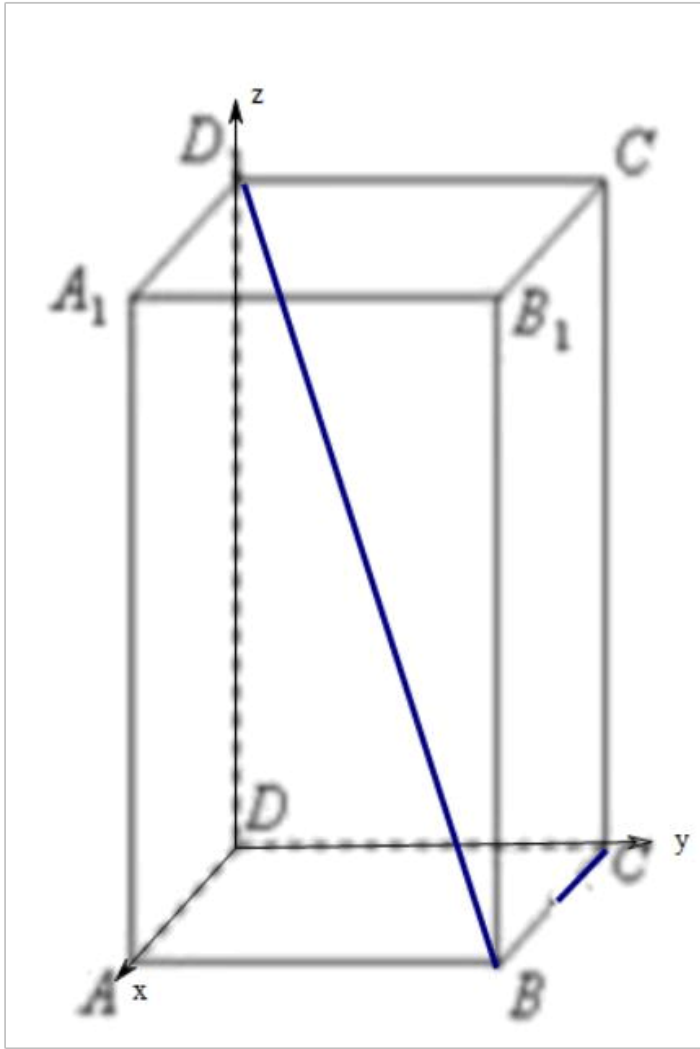
所以所作的所有三角形的面积和为 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3}}{1 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} = 1$.

故选：D.

9. AB

【分析】建立空间直角坐标系，运用向量法逐个分析即可.

【详解】



易知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，故以 D 为原点建立空间直角坐标系，

连接 BD_1 ，设 $AA_1 = z$ ， $AD = x$ ， $CD = y$ ， BD_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 θ ，故 $D_1(0,0,z)$ ，

$A(x,0,0)$ ， $B(x,y,0)$ ， $\overrightarrow{DB_1} = (x,y,z)$ ，易知面 BCC_1B_1 的法向量 $\mathbf{n} = (0,1,0)$ ，易知 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，故

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ ，可得 $\frac{1}{2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ，化简得 $3y^2 = x^2 + z^2$ ，结合底面 $ABCD$ 是正方形，可得 $x = y$ ，

故 $z^2 = 2y^2$ ， $z = \sqrt{2}y$ ，即 $AA_1 = \sqrt{2}AB$ ，故 A 正确，

易知面 $A_1B_1C_1D_1$ 的法向量 $\mathbf{m} = (0,0,1)$ ， $\overrightarrow{DB_1} = (x,y,z)$ ，设 BD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角为 ϕ ，

故 $\sin \phi = \left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ，化简得 $\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 $\phi = \frac{\pi}{4}$ ，故 B 正确，

易知 $A_1(x,0,z)$ ， $\overrightarrow{DA_1} = (x,0,z)$ ，故 $\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{DB_1} = x^2 + z^2 + y^2 \neq 0$ ，即 BD_1, DA_1 不垂直，故 C 错误，

易知 $B_1(y, y, \sqrt{2}y)$, $A(y, 0, 0)$, 故 $\overrightarrow{AB_1} = (0, y, \sqrt{2}y)$, $\overrightarrow{D_1B_1} = (y, y, \sqrt{2}y)$, $\overrightarrow{D_1C_1} = (0, y, \sqrt{2}y)$, $C(0, y, 0)$,

$\overrightarrow{D_1C_1} = (0, y, \sqrt{2}y)$, 设面 BCD_1 的法向量 $\mathbf{a} = (a, b, c)$, 故 $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{D_1C_1} = 0$,

解得 $a = 0$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$, 即 $\mathbf{a} = (0, \sqrt{2}, 1)$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\overrightarrow{AB_1}$ 不平行, 故 AB_1 与面 BCD_1 不垂直,

故 D 错误,

故选: AB

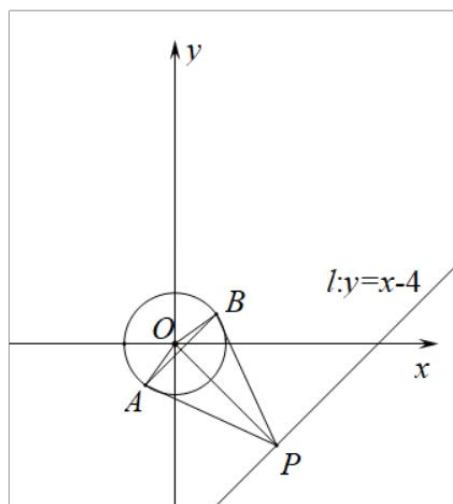
10. AC

【分析】由题意分析得 $OP = 1$, 结合 $OP \perp AB$, 即可判断 A, 求出 $|OP|_{\min} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

结合三角函数即可判断 D, 算出 $|AP| = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$ 即可得四边形 PAOB 的面积, 由此即可判

断 B, 结合等面积法即可判断 C.

【详解】



若要 $\angle APB$ 最大, 则只需锐角 $\angle APO$ 最大, 只需 $\sin \angle APO = \frac{|OA|}{|OP|} = \frac{1}{|OP|}$ 最大, 即 $|OP|$ 最小,

所以若 $|OP|$ 最小, 则 $OP \perp AB$, 由垂径分线定理有 $OP \perp AB$, 所以 $AB \parallel l$, 所以 $k_{AB} = k_l = 1$,

故 A 正确;

由题意 $|OP|_{\min} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 此时 $\sin \angle APO = \frac{1}{|OP|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos \angle APO = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$,

所以此时 $\sin \angle APB = 2 \sin \angle APO \cos \angle APO = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 故 D 错误;

而当 $|OP| = 2\sqrt{2}$ 时, $|AP| = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}$, 所以四边形 PAOB 的面积为 $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7}$, 故

B 错误;

由等面积法有四边形 PAOB 的面积为 $\frac{1}{2} |AB| |OP| = \sqrt{7}$, 又由题意 $|OP| = 2\sqrt{2}$, 所以 $|AB| = \frac{\sqrt{14}}{2}$,

故 C 正确.

故选: AC.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/845001332332012011>