

2023-2024 学年广西贵港市高二（上）期末数学试卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[0, 2]$ B. $\{0, 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，先确定出集合 A 的元素，再根据交集的运算法则算出答案.

【详解】根据题意，可得 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 \leq x \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

因为 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选：D.

2. 复数 $\frac{1+3i}{3+i}$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的运算法则、几何意义直接求解.

【详解】 $\frac{1+3i}{3+i} = \frac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$,

$\therefore$ 复数 $\frac{1+3i}{3+i}$ 在复平面内对应的点 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 位于第一象限.

故选：A.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}$, 若 $a_m = \frac{1}{7}$, 则 $m =$ ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】通过取倒数的方法，证得数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，求得 $\frac{1}{a_n} = 2n - 1$, 进而求出 $a_n = \frac{1}{2n-1}$

, 解决问题即可.

【详解】由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}$, $a_1 = 1$, 取倒数得: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$,

则 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是以 $\frac{1}{a_1} = 1$ 为首项, 2 为公差的等差数列.

所以 $\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$, 所以 $a_n = \frac{1}{2n-1}$;

由于 $a_m = \frac{1}{2m-1} = \frac{1}{7}$, 故 $m = 4$.

故选: C.

4. 已知 α 为第四象限角, 且 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同角三角函数的关系求解.

【详解】由题意, $\sin \alpha = -\frac{1}{2} \cos \alpha$, 又 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 联立可得 $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$.

又 α 为第四象限角, 则 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选: C.

5. 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的直线与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 若线段 AB 中点的坐标为

$(4, 2\sqrt{2})$, 则 $p =$ ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】利用点差法及中点与焦点坐标分别表示直线 AB 的斜率, 可建立关于 p 的方程, 求解可得.

【详解】设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} y_1^2 = 2px_1, \\ y_2^2 = 2px_2, \end{cases}$

两式作差得, $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2p(x_1 - x_2)$,

当 $x_1 = x_2$ 时, 则 AB 中点坐标为焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 不满足题意;

当 $x_1 \neq x_2$ 时, 得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$.

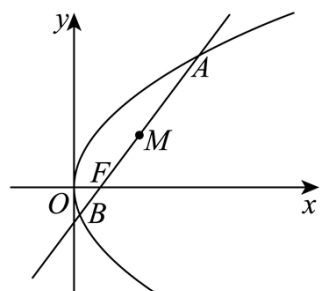
设线段 AB 中点 M , 因为 M 坐标 $(4, 2\sqrt{2})$, 且过焦点 F ,

所以 $y_1 + y_2 = 4\sqrt{2}$,

则 AB 的斜率 $k_{AB} = k_{FM} = \frac{2p}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 0}{4 - \frac{p}{2}}$,

解得 $p = 4$.

故选: A.



6. 苏格兰数学家纳皮尔在研究天文学的过程中, 为了简化其中的大数之间的计算而发明了对数. 利用对数运算可以求大数的位数. 已知 $\lg 5 = 0.699$, 则 2^{31} 是 ()

- A. 9 位数 B. 10 位数 C. 11 位数 D. 12 位数

【答案】B

【解析】

【分析】利用 $\lg 2 + \lg 5 = 1$ 及指数与对数的转化计算即可.

【详解】记 $2^{31} = M$, 则 $31 \times \lg 2 = \lg M$,

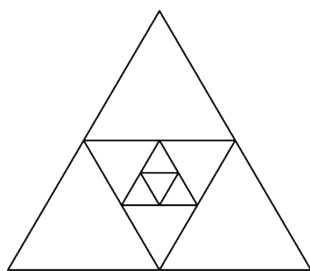
则 $\lg M = 31 \times (1 - \lg 5) = 9.331$, 则 $M = 10^{9.331} \in (10^9, 10^{10})$,

故 2^{31} 是 10 位数.

故选: B

7. 如图, 三角形蜘蛛网是由一些正三角形环绕而成的图形, 每个正三角形的顶点都是其外接正三角形各边的中点. 现有 17

米长的铁丝材料用来制作一个网格数最多的三角形蜘蛛网,若该三角形蜘蛛网中最大的正三角形的边长为3米,则最小的正三角形的边长为()



A. $\frac{3}{4}$ 米

B. $\frac{3}{8}$ 米

C. $\frac{3}{16}$ 米

D. $\frac{3}{32}$ 米

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意,构造正三角形周长满足的等比数列,结合等比数列前 n 项和公式及指数不等式进行求解.

【详解】由题可知,该三角形蜘蛛网中三角形的周长从大到小是以9为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

设最小的正三角形的边长为 $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 米,

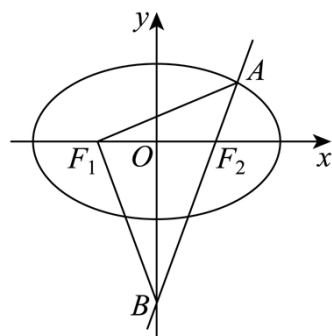
$$\text{则 } \frac{9 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} \leq 17, \text{ 则 } \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{18}, \text{ 即 } 2^n \leq 18, \text{ 得 } n \leq 4,$$

故最小的正三角形的边长为 $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ 米.

故选: B.

8. 如图,椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为椭圆 C 上一点, B 为 y 轴上一点,

点, F_1 在以 AB 为直径的圆上,且 $\overrightarrow{3F_2A} = -2\overrightarrow{F_2B}$, 则椭圆 C 的离心率为()



A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】由 $3\overrightarrow{F_2A} = -2\overrightarrow{F_2B}$ ，可设 $|F_2A| = 2t, |F_2B| = 3t (t > 0)$ ，结合椭圆定义以及 $F_1A \perp F_1B$ 得 $t = \frac{a}{3}$ ，再结合余弦定理知识求得 a, c 等量关系式，则椭圆的离心率可求。

【详解】由 $3\overrightarrow{F_2A} = -2\overrightarrow{F_2B}$ ，可设 $|F_2A| = 2t, |F_2B| = 3t (t > 0)$ ，则 $|AB| = 5t$ ，

由对称性知 $|F_2B| = |F_1B| = 3t$ ，

由题可知 $F_1A \perp F_1B$ ，则 $|F_1A| = 4t, \cos \angle F_1AB = \frac{4}{5}$ ，

由椭圆的定义知 $|AF_2| + |AF_1| = 6t = 2a$ ，则 $t = \frac{a}{3}$ ，

在 $\triangle F_1AF_2$ 中， $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{16t^2 + 4t^2 - 4c^2}{2 \cdot 4t \cdot 2t} = \frac{4}{5}$ ，

则 $\frac{\frac{20}{9}a^2 - 4c^2}{\frac{16}{9}a^2} = \frac{4}{5}$ ，整理得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{5}$ ，故 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

故选：D。

二、多选题：本题共 4 小题，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_7 = 9$ ， $S_4 = 3a_4$ ，则 ()

A. $\{a_n\}$ 的公差为 1

B. $\{a_n\}$ 的公差为 2

C. $S_4 = 18$

D. $a_{2023} = 2025$

【答案】ACD

【解析】

【分析】列出方程组，求出等差数列的公差和首项，判断 A，B；根据等差数列通项公式以及前 n 项和公式即可判断 C，D。

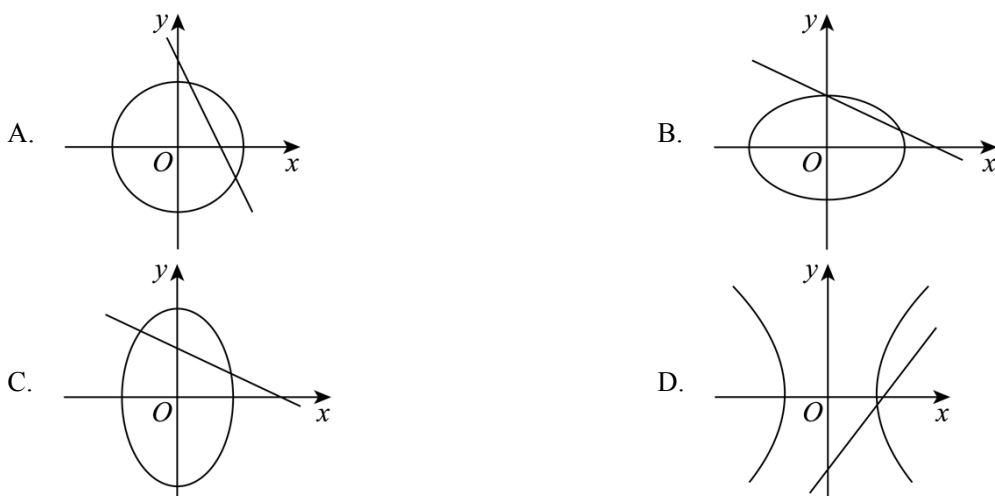
【详解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由 $a_7 = 9$ ， $S_4 = 3a_4$ ，得 $\begin{cases} a_1 + 6d = 9 \\ 4a_1 + 6d = 3a_1 + 9d \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 1 \end{cases}$ ，故 A 正确，B 错误；

$S_4 = 4a_1 + 6d = 18$ ， $a_{2023} = a_1 + 2022d = 2025$ ，C，D 正确。

故选：ACD

10. 已知 $mn \neq 0$ ，在同一个坐标系下，曲线 $mx^2 + ny^2 = mn$ 与直线 $mx + ny = mn$ 的位置可能是 ()



【答案】BD

【解析】

【分析】先根据题意得到曲线为 $\frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{m} = 1$ ，直线为 $\frac{x}{n} + \frac{y}{m} = 1$ ，再根据当 $m = n > 0$ ， $n > m > 0$ ，

$m > n > 0$ ， $n > 0 > m$ 时，曲线及直线的横截距与纵截距的关系即可逐项判断。

【详解】因为 $mn \neq 0$ ，所以曲线为 $\frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{m} = 1$ ，直线为 $\frac{x}{n} + \frac{y}{m} = 1$ ，

当 $m = n > 0$ 时，曲线表示的是圆，直线的横截距与纵截距相等，则 A 错误；

当 $n > m > 0$ 时，曲线表示焦点在 x 轴上的椭圆，直线的横截距比纵截距大，则 B 正确；

当 $m > n > 0$ 时，曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆，直线的横截距比纵截距小，则 C 不正确；

当 $n > 0 > m$ 时，曲线表示焦点在 x 轴上的双曲线，直线的横截距为正，纵截距为负，则 D 正确。

故选：BD.

11. 已知函数 $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{x}{2}$ ，则 ()

A. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 的最小值为 -1

【答案】AC

【解析】

【分析】化简 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$ ，利用余弦函数的性质对各个选项逐一分析可得答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \quad f(x) &= 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{x}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} \\ &= \cos^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2} = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

对于 AB，当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，

$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 对称，故 A 正确，B 不正确；

对于 C，当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时， $x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right) \subseteq (0, \pi)$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 C 正确；

对于 D， $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ ，故 D 不正确.

故选：AC.

12. 已知 P 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所在空间内一点，且 $\vec{BP} = \lambda \vec{BA} + (1 - \lambda) \vec{BC}$ ， $0 < \lambda < 1$ ，则

()

A. $\vec{B_1P} \cdot \vec{BD_1} = 0$

B. 三棱锥 $D - PA_1C_1$ 的体积为定值

C. 存在唯一的 λ ，使得平面 $PA_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1

D. 存在唯一的 λ ，使得 $\cos \langle \vec{PB_1}, \vec{PD_1} \rangle = \frac{1}{4}$

【答案】AB

【解析】

【分析】对 A：由 $\vec{BP} = \lambda \vec{BA} + (1 - \lambda) \vec{BC}$ 可得点 P 在线段 AC 上，建立空间直角坐标系后由坐标计算即可得；对 B：借助线面平行得到三棱锥的高为定值，由底面积亦为定值，故体积为定值；对 C：由题意可得 $PA_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，故 C 错误；对 D：借助空间向量计算即可得.

【详解】以 D 为坐标原点， DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，设 $DA=1$ ，

则 $B_1(1,1,1)$ ， $D_1(0,0,1)$ ， $B(1,1,0)$ ， $A(1,0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ，

因为 $\vec{BP} = \lambda \vec{BA} + (1-\lambda) \vec{BC}$ ，故 $(1-\lambda) \vec{BP} - (1-\lambda) \vec{BC} = \lambda \vec{BA} - \lambda \vec{BP}$ ，

即有 $(1-\lambda) \vec{CP} = \lambda \vec{PA}$ ，即 $\vec{CP} = \lambda \vec{CA}$ ，故点 P 在线段 AC 上，有 $P(\lambda, 1-\lambda, 0)$ ，

则有 $\vec{B_1P} = (\lambda-1, -\lambda, -1)$ ， $\vec{BD_1} = (-1, -1, 1)$ ，

则 $\vec{B_1P} \cdot \vec{BD_1} = 1-\lambda+\lambda-1=0$ ，故 $\vec{B_1P} \cdot \vec{BD_1} = 0$ ，故 A 正确；

由点 P 在线段 AC 上，且 $AC \parallel A_1C_1$ ，又 $A_1C_1 \subset$ 平面 DA_1C_1 ，

$AC \not\subset$ 平面 DA_1C_1 ，故 $AC \parallel$ 平面 DA_1C_1 ，故点 P 到平面 DA_1C_1 距离不变，

故三棱锥 $D-PA_1C_1$ 的体积为定值，故 B 正确；

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ，

又 $A_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，故 $BB_1 \perp A_1C_1$ ，又 $BB_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，

且 $B_1D_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，故 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，又 $A_1C_1 \subset$ 平面 PA_1C_1 ，

故平面 $PA_1C_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 恒成立，故 C 错误；

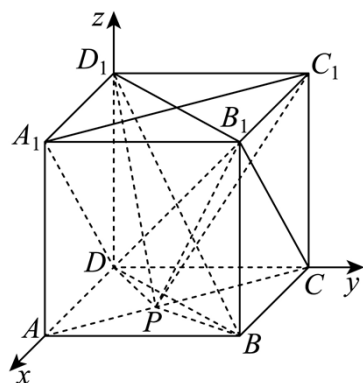
$\vec{PB_1} = (1-\lambda, \lambda, 1)$ ， $\vec{PD_1} = (-\lambda, \lambda-1, 1)$ ，

故 $\cos \langle \vec{PB_1}, \vec{PD_1} \rangle = \frac{\vec{PB_1} \cdot \vec{PD_1}}{|\vec{PB_1}| |\vec{PD_1}|} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2\lambda^2 - 2\lambda + 2}$ ，

由 $\frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2\lambda^2 - 2\lambda + 2} = \frac{1}{4}$ ，得 $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ ，方程无解，

故不存在实数 λ ，使得 $\cos \langle \vec{PB_1}, \vec{PD_1} \rangle = \frac{1}{4}$ ，故 D 错误。

故选：AB.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据平面向量的模长公式，根据数量积的运算律，可得答案.

【详解】因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是单位向量，所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$,

又因为 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}|$, 所以 $\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$,

解得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{10}(8\vec{b}^2 - 3\vec{a}^2) = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

14. 已知函数 $f(x) = (e^x + ae^{-x})\cos x$ 是奇函数，则 $a =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】由已知结合奇函数的定义即可求解.

【详解】因为 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $(e^{-x} + ae^x)\cos(-x) = -(e^x + ae^{-x})\cos x$

即 $(e^{-x} + ae^x)\cos x = (-e^x - ae^{-x})\cos x$, 则 $a = -1$,

经检验, $a = -1$ 满足题意.

故答案为: -1.

15. 若直线 $x + 3y - 1 = 0$ 是圆 $x^2 + y^2 - 2ax - 8 = 0$ 的一条对称轴，则点 $P(2, \sqrt{3})$

与该圆上任意一点的距离的最小值为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】利用圆关于直线对称可知该直线过圆心 $(a,0)$ ，可得 $a=1$ ，再利用定点到圆上点距离的最值的求法即可求得结果.

【详解】由题可知，该圆的圆心为 $(a,0)$ ，直线 $x+3y-1=0$ 过圆心，
则 $a-1=0$ ，解得 $a=1$ ，

则该圆的方程转化为 $(x-1)^2+y^2=9$ ，该圆圆心为 $(1,0)$ ，半径为3，

易知圆心与 $P(2,\sqrt{3})$ 的距离为 $\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ ，

故点 $P(2,\sqrt{3})$ 与该圆上任意一点的距离的最小值为 $3-2=1$.

故答案为：1

16. 若 m,n 是函数 $f(x)=-x^2-ax-b(a>0,b>0)$ 的两个不同的零点，且 $m,n,3$ 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $2a+b=$ _____.

【答案】24

【解析】

【分析】根据韦达定理得 $\begin{cases} m < 0 \\ n < 0 \end{cases}$ ，根据等比数列性质求得 $b=9$ ，再根据等差数列的性质求得 $a=\frac{15}{2}$ ，即可得解.

【详解】由题可知 $\begin{cases} m+n=-a < 0 \\ mn=b > 0 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} m < 0 \\ n < 0 \end{cases}$ ，

$m,n,3$ 这三个数可适当排序后成等比数列，则3必是等比中项，则 $mn=b=9$ ，

$m,n,3$ 这三个数可适当排序后成等差数列，则3必不是等差中项，

若 m 是等差中项，则 $2m=n+3=\frac{9}{m}+3$ ，解得 $m=-\frac{3}{2}, n=-6$ ，

则 $a=-(m+n)=\frac{15}{2}$ ，故 $2a+b=24$ ，

若 n 是等差中项，则 $2n=m+3=\frac{9}{n}+3$ ，解得 $n=-\frac{3}{2}, m=-6$ ，

则 $a=-(m+n)=\frac{15}{2}$.故 $2a+b=24$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/845024241031012033>