

辽宁省重点高中协作校 2023-2024 学年第二学期高二期末考试模拟
卷 C

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}$ 、集合 $B = \{y | y = 2^{x+1}\}$ ，则“ $x \in (C_U A) \cap B$ ”是“ $x \in \{x | x \neq 0\}$ ”的（ ）。

- A、充分不必要条件 B、必要不充分条件 C、充要条件
D、既不充分也不必要条件

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减的是（ ）。

- A、 $f(x) = x^{\frac{3}{7}}$ B、 $g(x) = e^x - e^{-x}$ C、 $h(x) = -x^2 + 1$
D、 $w(x) = \lg|x|$

3. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若 $a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4 \cdot a_6 = 0$ ， $S_4 = 15$ ，则 $S_{2025} =$ （ ）。

- A、 $2^{2024} + 1$ B、 $2^{2025} - 1$ C、 2^{2025}
D、 $2^{2025} + 1$

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^3 - 1$ ，当 $-1 \leq x \leq 1$ 时，

$$f(-x) = -f(x)，当 x > \frac{1}{2} 时，f(x + \frac{1}{2}) =$$

$$f(x - \frac{1}{2})。则 f(6) = ()。$$

- A、-2 B、1 C、0
D、2

5. 已知正整数 N 的 70 次方是一个 83 位数，则由下面表格中部分对数的近似值（精确

C、若 $\lambda = -\frac{11}{2}$ ，则当且仅当 $n=3$ 时， S_n 取得最小值

D、“ $\lambda > -3$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的充要条件

10. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ ，满足 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - f(2-x) \cdot f(2-y)$ ，且 $f(0) \neq 0$ ， $f(-2) = 0$ ，则下列说法一定正确的是（ ）。

A、 $f(2) = 1$

B、函数 $f(x)$ 是偶函数

C、 $[f(x)]^2 + [f(x+2)]^2 = 1$

D、 $\sum_{i=1}^{2025} f(i) = -1$

11. 关于函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$ ，下列判断正确的是（ ）。

A、 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点

B、函数 $y = f(x) - x$ 有且只有 1 个零点

C、存在正实数 k ，使得 $f(x) > kx$ 成立

D、对任意两个正实数 x_1 、 x_2 ，且 $x_1 > x_2$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $x_1 + x_2 > 4$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 若函数 $f(2x+1)$ 为奇函数、函数 $f(x+2)$ 为偶函数，且当 $x \in (0,1]$ 时，

$f(x) = \log_2 x$ ，则 $f(\frac{19}{2}) =$ _____。

13. 设函数 $f(x) = [x \cdot [x]]$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如： $[1.3] = 1$ 、

$[-1.5] = -2$ 、 $[3] = 3$ ，当 $x \in [0, n)$ ($n \in N_+$) 时，函数 $f(x)$ 的值域为 A_n ，记集合 A_n 中

元素的个数为 a_n ，则 $\frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_3-1} + \frac{1}{a_4-1} + \cdots + \frac{1}{a_{2024}-1} =$

_____。

14. 已知函数 $f(x) = a \cdot (\ln x - 1) + (b+1) \cdot x$ 在区间 $[e, e^3]$ 上存在零点，则 $a^2 + b^2$ 的最小值为_____。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分13分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 4$ 、 $S_3 = 14$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n + 3a_{n-1} + 5a_{n-2} + \cdots + (2n-1)a_1$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

16. (本小题满分15分) 已知函数 $f(x) = x^3 - ax + a$ ($a \in R$)。

(1) 若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 求函数 $f(x)$ 的图像在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内的值域。

17. (本小题满分15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_4 = 2a_1$, $\frac{S_n}{n} - \frac{a_n}{2} = \frac{3}{2}$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n + 1}{(n+1) \cdot a_n}$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n = \frac{n}{2(n+2)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1}$ 。

18. (本小题满分17分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x$ ($a \in R$)。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 若 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 求证: $x_1 \cdot x_2 < 4$ 。

19. (本小题满分17分) 给定正整数 $n \geq 2$, 设集合

$M = \{\alpha \mid \alpha = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_k \in \{0,1\}, k=1,2,\dots,n\}$ 。对于集合 M 中的任意元素

$\beta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\gamma = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 记 $\beta \cdot \gamma = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$ 。设

$A \subseteq M$, 且集合

$A = \{\alpha_i \mid \alpha = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}), i=1,2,\dots,n\}$, 对于 A 中任意元素 α_i, α_j , 若

$\alpha_i \cdot \alpha_j = \begin{cases} p, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$, 则称集合 A 具有性质 $T(n, p)$ 。

-
- (1) 判断集合 $A = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ 是否具有性质 $T(3,2)$? 说明理由;
- (2) 判断是否存在具有性质 $T(4, p)$ 的集合 A , 并加以证明;
- (3) 若集合 A 具有性质 $T(n, p)$, 证明: $t_{1j} + t_{2j} + \cdots + t_{nj} = p$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

绝密★启用并使用完毕前
时____分——____时____分

测试时间：_____年____月____日

辽宁省重点高中协作校 2023-2024 学年第二学期高二期末考试模拟
卷 C

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}$ 、集合 $B = \{y | y = 2^{x+1}\}$ ，则“ $x \in (C_U A) \cap B$ ”是“ $x \in \{x | x \neq 0\}$ ”的（ ）。

- A、充分不必要条件 B、必要不充分条件 C、充要条件
D、既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】 $\because 2x - x^2 \geq 0$ ， $\therefore x^2 - 2x = x(x - 2) \leq 0$ ，解得 $0 \leq x \leq 2$ ，又 $y > 0$ ，

$\therefore A = [0, 2]$ 、 $B = (0, +\infty)$ ， $\therefore C_U A = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ， \therefore

$(C_U A) \cap B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

\therefore “ $x \in (C_U A) \cap B$ ”是“ $x \in \{x | x \neq 0\}$ ”的充要条件，故选 C。

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减的是（ ）。

- A、 $f(x) = x^{\frac{3}{7}}$ B、 $g(x) = e^x - e^{-x}$ C、 $h(x) = -x^2 + 1$
D、 $w(x) = \lg|x|$

【答案】C

【解析】A 选项， $f(x) = x^{\frac{3}{7}}$ 为奇函数，错，

B 选项， $g(x) = e^x - e^{-x}$ 为奇函数，错，

C 选项， $h(x) = -x^2 + 1$ 为偶函数，在 $(0, +\infty)$ 内单调递减，对，

D 选项， $w(x) = \lg|x|$ 为偶函数，在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，错，

故选 C。

3. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若 $a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4 \cdot a_6 = 0$, $S_4 = 15$, 则 $S_{2025} =$ ()。

- A、 $2^{2024} + 1$ B、 $2^{2025} - 1$ C、 2^{2025}
D、 $2^{2025} + 1$

【答案】B

【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$),

$$\because a_6^2 - 4a_4^2 - 3a_4 \cdot a_6 = 0, \therefore (4a_4 - a_6)(a_4 + a_6) = 0.$$

$$\because a_n > 0, \therefore 4a_4 - a_6 = 0, \therefore q^2 = \frac{a_6}{a_4} = 4, \text{解得 } q = 2 \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore S_4 = a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 15a_1 = 15, \therefore a_1 = 1, \therefore$$

$$S_{2025} = a_1 \cdot \frac{1-q^{2025}}{1-q} = 2^{2025} - 1, \text{ 故选 B.}$$

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时,

$$f(-x) = -f(x), \text{ 当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x + \frac{1}{2}) =$$

$$f(x - \frac{1}{2}). \text{ 则 } f(6) = \text{ ()}.$$

- A、-2 B、1 C、0
D、2

【答案】D

【解析】 \because 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x + \frac{1}{2}) = f(x - \frac{1}{2})$, \therefore 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x+1) = f(x)$, 即周期为 $T=1$,

$$\therefore f(6) = f(1), \therefore \text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f(-x) = -f(x), \therefore f(1) = -f(-1),$$

$$\therefore \text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = x^3 - 1, \therefore f(-1) = -2, \therefore f(1) = -f(-1) = 2, \therefore$$

$f(6)=2$ ，故选 D。

5. 已知正整数 N 的 70 次方是一个 83 位数，则由下面表格中部分对数的近似值（精确到 0.001），可得 N 的值为（ ）。

M	2	3	7	11	13
$\lg M$	0.301	0.477	0.845	1.041	1.114

A、13

B、14

C、15

D、16

【答案】C

【解析】由正整数 N 的 70 次方是一个 83 位数， $\therefore 10^{82} \leq N^{70} < 10^{83}$ ，

取常用对数得 $82 \leq 70 \lg N < 83$ ，即 $1.171 \leq \lg N < 1.186$ ，

由表可知 $\lg 15 = \lg(3 \times 10 \div 2) = \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 \approx 0.477 + 1 - 0.301 = 1.176$ ，

$\therefore 1.176 \in [1.171, 1.186)$ ， $\therefore N$ 的值为 15，故选 C。

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上且以 3 为周期的奇函数，当 $x \in (0, \frac{3}{2})$ 时，

$f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 6]$ 内的零点个数是（ ）。

A、3

B、5

C、7

D、9

【答案】D

【解析】 $\because f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数， $\therefore f(0) = 0$ ，又周期为 3，则

$f(3) = f(6) = 0$ ，

当 $x \in (0, \frac{3}{2})$ 时，令 $f(x) = \ln(x^2 - x + 1) = 0$ ，则 $x^2 - x + 1 = 1$ ，解得 $x = 0$

（舍去）或 $x = 1$ （可取），

$\therefore f(1) = 0$ ，则 $f(4) = 0$ ， $\therefore f(-1) = -f(1) = 0$ ，则 $f(2) = f(5) = 0$ ，

又 $f(\frac{3}{2}) = -f(-\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2} - 3) = f(-\frac{3}{2})$ ，则 $f(\frac{3}{2}) = 0$ ，则 $f(\frac{9}{2}) = 0$ ，

则共有 0 、 1 、 $\frac{3}{2}$ 、 2 、 3 、 4 、 $\frac{9}{2}$ 、 5 、 6 共九个零点，故选 D。

7. 若直线 $y=2x$ 为曲线 $y=e^{ax+b}$ 的一条切线，则 ab 的最大值为 ()。

- A、 $\frac{2}{e^2}$ B、 $\frac{1}{e}$ C、 $\frac{2}{e}$
D、 $\frac{2\sqrt{e}}{e}$

【答案】A

【解析】设 $f(x)=e^{ax+b}$ ，定义域为 R ，则 $f'(x)=a \cdot e^{ax+b}$ ，设切点为 $(x_0, a \cdot e^{ax_0+b})$ ，则 $f'(x_0)=a \cdot e^{ax_0+b}$ ，

则切线方程为 $y-e^{ax_0+b}=a \cdot e^{ax_0+b} \cdot (x-x_0)$ ，整理可得

$$y = a \cdot e^{ax_0+b} + (1 - a \cdot x_0) \cdot e^{ax_0+b},$$

$$\therefore \begin{cases} (1 - a \cdot x_0) \cdot e^{ax_0+b} = 0 \\ a \cdot e^{ax_0+b} = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } x_0 = \frac{1}{a}, a \cdot e^{ax_0+b} = a \cdot e^{b+1} = 2,$$

$$\therefore a = \frac{2}{e^{b+1}}, \therefore ab = \frac{2b}{e^{b+1}},$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{2x}{e^{x+1}}, \text{ 定义域为 } R, \text{ 则 } g'(x) = \frac{2(1-x)}{e^{x+1}},$$

当 $x < 1$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调递增，

当 $x > 1$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减，

\therefore 当 $x=1$ 时， $g(x)$ 取得最大值 $g(1) = \frac{2}{e^2}$ ， $\therefore ab$ 的最大值为 $\frac{2}{e^2}$ ，故选

A。

【点睛】设出切点，根据直线 $y=2x$ 为曲线 $y=e^{ax+b}$ 的一条切线，求出 a 、 b 的关系，是解决本题的关键。

8. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若存在实数 $M > 0$ ，使得对任意的 $n \in N^*$ ，都有 $|S_n| < M$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 为“和有界数列”。下列命题正确的是 ()。

A、若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且首项 $a_1=0$ ，则 $\{a_n\}$ 是“和有界数列”

B、若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d=0$ ，则 $\{a_n\}$ 是“和有界数列”

C、若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且公比 $|q|<1$ ，则 $\{a_n\}$ 是“和有界数列”

D、若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $\{a_n\}$ 是“和有界数列”，则 $\{a_n\}$ 的公比 $|q|<1$

【答案】C

【解析】A 选项，若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且首项 $a_1=0$ ，当 $d>0$ 时，

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d = \frac{d}{2} \cdot n^2 - \frac{d}{2} \cdot n,$$

当 n 趋近于正无穷时， $|S_n|$ 趋近于正无穷，则 $\{a_n\}$ 不是“和有界数列”，错，

对于 B，若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d=0$ ，则 $S_n = n \cdot a_1$ ，

当 $a_1 \neq 0$ 时，当 n 趋近于正无穷时， $|S_n|$ 趋近于正无穷，则 $\{a_n\}$ 不是“和有界数列”，错，

对于 C，若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且公比 $|q|<1$ ，则

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n,$$

$$\therefore |S_n| = \left| \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n \right| < \left| \frac{a_1}{1-q} \right| + \left| \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n \right| = 2 \left| \frac{a_1}{1-q} \right|, \text{ 则 } \{a_n\}$$

是“和有界数列”，对，

对于 D，若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $\{a_n\}$ 是“和有界数列”，则 $\{a_n\}$ 的公比 $|q|<1$ 或 $q=-1$ ，错，

故选 C。

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = n^2 + \lambda n + \mu$ ，则下列结论正确的有 ()。

A、若 $\mu=0$ ，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/845223312000011304>