

清华大学 2024 年强基计划笔试

1. 点 $A \in \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{200} + \frac{y^2}{8} \leq 1 \right\}$, $M(2, 1)$. 求满足 $S_{\triangle OAM} \leq 3$ 的整点的个数.
2. $5a - 3c \leq b \leq 4a - c$, $c \ln b \geq a + c \ln c$, a, b, c 均为正数, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大, 最小值是否存在? 是多少?
3. 点集 $S = \{(x, y) \mid x \leq 5, y \leq 4 \text{ 且 } x, y \in \mathbb{N}^*\}$, 则由 S 中的点可以组成多少个不同的三角形?
4. 抛物线 $C: x^2 = 4y$, 焦点为 F . 过焦点 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点. 过 A 作平行于 B 点切线的直线交 C 于点 P , 交 y 轴于点 D . 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$, 则 ()
 - A. $y_1 y_2 = 4$.
 - B. $S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 16.
 - C. $|DF| = |AF|$
 - D. $x_1 + x_3 = 2x_2$
5. $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ (a, b, c 非负), 则 $f(a, b, c)$ 的最大值和最小值是否存在? 是多少?
6. $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$. 则 ()
 - A. 若 $f(x) = a$ 有两个解, 则 $0 < a < \frac{1}{e^2}$.
 - B. 若 $|f(x) + m|$ 有最小值, 则 $m \leq -\frac{1}{2e^2}$.
 - C. 若 $|f(x) + m|$ 有最小值, 则 $m < -\frac{1}{2e^2}$.
 - D. 若 $f(x) = a$ 有两个解 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 > 4$.
7. 圆上 7 点所成线段中任取两条, 这两条线段无公共点的概率为?
8. 复方程 $(z^3 + z)^2 + 9z^3 - 72z = 0$ 的所有复数根的平方和为?
9. 已知 $\{\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\} = \{\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$, 则 α 可以是 ()
 - A. $\frac{\pi}{8}$
 - B. $-\frac{3\pi}{8}$
 - C. $-\frac{2\pi}{7}$
 - D. $-\frac{\pi}{14}$

10. $x^3 + px^2 + q = 0$ 在 $(0,2)$ 有解, 则 $p+q$ 可能的取值为?

11. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 在 $(0,2)$ 内有三个不等实根, 则 $p+q+r$ 的取值范围?

12. $a + e^a = b + \ln b = 4$, 则 ()

A. $a \ln b + b \ln a > 1$

B. $a \ln b + b \ln a = 1$

C. $ab < 4$

D. $ab > e$

13. 已知复数 z 满足 $|z|=1$, $z^n = z + \sqrt{2}$, 则 n 的最小值为?

14. 四面体 $V-ABC$ 中, $VA=VB=2\sqrt{2}$, $VC=3$, $CA=CB=4$. 求 CA 与 VB 所成角余弦的最值.

15. 正四面体 $ABCD$ 中, 棱长为 $2\sqrt{2}$. 点 P 满足 $|\vec{PA} + \vec{PB}| = 2$, 则 $\vec{AP} \cdot \vec{AD}$ 的 ()

A. 最小值为 $4 - 2\sqrt{2}$.

B. 最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$

C. 最小值为 $2 - 2\sqrt{2}$

D. 最大值为 $4 + 2\sqrt{2}$

16. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 初始时 Q 与 A 重合, 每一步 Q 都等可能得移动到相邻顶点, 记移动 n 步后仍在面 $ABCD$ 上的概率为 P_n , 则 ()

A. 移动10步后, Q 仍在 A 点的概率为 $\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3} \right)^9 \right)$

B. $P_2 = \frac{5}{9}$

C. $P_{10} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{10} \right)$

D. P_n 与 P_{n-1} 的递推式为 $P_n = \frac{1}{3} P_{n-1} + \frac{1}{3}$

17. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$, 则 ()

A. $[a_{400}] = 20$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{3}$

C. $[a_{9000}] = 30$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

18. 复数列 $z_{n+1} = \frac{1-2\sqrt{3}+z_{n-1}}{1+(1-2\sqrt{3})z_{n-1}}$, 且 $\text{Im}z_1 \leq 1$, 则 $|z_7 - 1|$ 的最大值是_____.

19. 某区域仅有东西向或南北向道路, 某人从区域中心出发后又回到起点, 且路途中不经过重复区域, 已知此人左转100次, 则其右转次数可以是 ()

A. 98

B. 96

C. 102

D. 104

20. 正整数 a, b, c 均不大于100, 且满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$. 求满足这样条件的 a, b, c 的组数.

21. $f(x) = \ln x + \cos x$ 的所有极值点依次为 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| =$ _____.

22. $f(u) = u^2 + au + b - 2$, $u = x + \frac{1}{x}$, $f(u)$ 有零点, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为多少.

23. 1. $f(x)$ 是在 $[0, 1]$ 上的连续函数, 设 $A_n = \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$, 则 () .

A. $A_n \leq A_{2n}$

B. $A_n \leq A_{n+m}$

C. $2A_n \leq A_{2n}$

D. $2A_n \leq A_{n+m}$.

24. 双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 斜率为1的直线 l 与 Γ 交于 A, B 两点, 点 C 在 Γ 上, 且 $AC \perp BC$, $\triangle ABC$ 的外心为

R , $\triangle OAC$ 的重心为 P , $\triangle OBC$ 的重心为 Q , $k_{OP} \cdot k_{OQ} \cdot k_{OR} = -8$, 则 Γ 的离心率 $e =$ _____.

25. $m, n \in \mathbf{N}^*, m+n \leq 2024$, 使得 $m^2n + m + 7 \mid mn^2 + n + m$ 的解 (n, m) 的组数有_____组.

26. $a_{n+1} = \frac{-1}{2a_n - 3}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 等于多少? 比较 S_n 与 $\frac{n}{2}$.

清华大学 2024 年强基计划笔试

1. 点 $A \in \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{200} + \frac{y^2}{8} \leq 1 \right\}$, $M(2, 1)$. 求满足 $S_{\triangle OAM} \leq 3$ 的整点的个数.

【答案】 65

【分析】 设 $A(x_0, y_0)$, 直线 OM 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$, $S_{\triangle OAM} = \frac{|x_0 - 2y_0|}{2} \leq 3$, 设 $x_0 - 2y_0 = k$, 则

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$, 把 $x_0 = 2y_0 + k$, 代入 $\frac{x_0^2}{200} + \frac{y_0^2}{8} \leq 1$, 讨论 k 可得答案.

【详解】 设 $A(x_0, y_0)$, 直线 OM 的方程为 $y = \frac{1}{2}x$, 即 $x - 2y = 0$,

$$S_{\triangle OAM} = \frac{1}{2} |OM| \frac{|x_0 - 2y_0|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_0 - 2y_0|}{2} \leq 3,$$

设 $x_0 - 2y_0 = k$, 则 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$, $x_0 = 2y_0 + k$

代入 $\frac{x_0^2}{200} + \frac{y_0^2}{8} \leq 1$, 化简得 $29y_0^2 + 4ky_0 \leq 200 - k^2$,

当 $k = 0$ 时, $29y_0^2 \leq 200$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

当 $k = 1$ 时, $29y_0^2 + 4y_0 \leq 199$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

当 $k = 2$ 时, $29y_0^2 + 8y_0 \leq 196$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

当 $k = 3$ 时, $29y_0^2 + 12y_0 \leq 191$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

当 $k = 4$ 时, $29y_0^2 + 16y_0 \leq 184$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

当 $k = 5$ 时, $29y_0^2 + 20y_0 \leq 175$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

当 $k = 6$ 时, $29y_0^2 + 24y_0 \leq 164$, $y_0 = 0, \pm 1, \pm 2$, 有 5 个整点;

根据对称性, 当 $k = -1, -2, -3, \dots, -6$ 时, 也分别有 5 个整点,

所以共有 65 个整点.

2. $5a - 3c \leq b \leq 4a - c$, $c \ln b \geq a + c \ln c$, a, b, c 均为正数, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大, 最小值是否存在? 是多少?

【答案】 存在, $\frac{b}{a}$ 的最大值为 3, 最小值为 e .

【分析】 根据已知条件进行化简, 构造函数利用函数导数判断函数的单调性, 解出最值, 再根据条件限制范围;

【详解】 由题意知, $5a - 3c \leq b \leq 4a - c$, $c \ln b \geq a + c \ln c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

$$\begin{cases} 5-3\frac{c}{a} \leq \frac{b}{a} \leq 4-\frac{c}{a}, \\ \ln \frac{b}{c} \geq \frac{a}{c} \end{cases}, \text{令 } x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a}, \text{则 } 5-3y \leq x \leq 4-y, \text{ 且 } \ln \frac{x}{y} \geq \frac{1}{y}, x > 0, y > 0,$$

$$\frac{x}{y} \geq e^{\frac{1}{y}}, \therefore x \geq ye^{\frac{1}{y}}, \text{令 } t = \frac{1}{y}, \text{则 } x \geq \frac{e^t}{t}, \text{令 } u(t) = \frac{e^t}{t}, \text{则 } u'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}. t > 1, u'(t) > 0; 0 < t < 1, u'(t) < 0;$$

$\therefore t > 1, u(t)$ 递增, $0 < t < 1, u(t)$ 递减; 所以 $u_{\min} = e$, 此时 $t = y = 1, \therefore x \geq e$,

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \geq e \end{cases}, \text{因此 } x \in [e, 3]$$

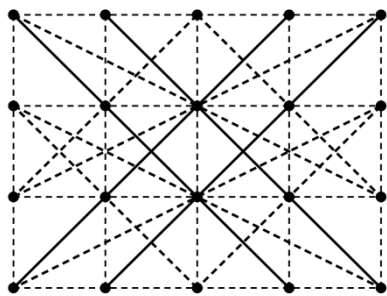
所以 $\frac{b}{a}$ 的最大, 最小值存在, $\frac{b}{a}$ 的最大值为 3, 最小值为 e .

3. 点集 $S = \{(x, y) | x \leq 5, y \leq 4 \text{ 且 } x, y \in \mathbb{N}^*\}$, 则由 S 中的点可以组成多少个不同的三角形?

【答案】 1056

【分析】 利用组合数的知识结合图象分析即可.

【详解】 总共有 $C_{20}^3 = 1140$ 种,



如图, 三点共线 (粗虚线) 有 8 组,

四点共线有 9 组 (图中实线加上 5 条竖线),

五点共线有 4 组,

于是一共能组成 $C_{20}^3 - 8C_3^3 - 9C_4^3 - 4C_5^3 = 1140 - 8 - 36 - 40 = 1056$ 种.

故答案为: 1056.

4. 抛物线 $C: x^2 = 4y$, 焦点为 F . 过焦点 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点. 过 A 作平行于 B 点切线的直线交 C 于点

P , 交 y 轴于点 D . 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_3, y_3)$, 则 ()

A. $y_1 y_2 = 4$.

B. $S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 16.

C. $|DF| = |AF|$

D. $x_1 + x_3 = 2x_2$

【答案】CD

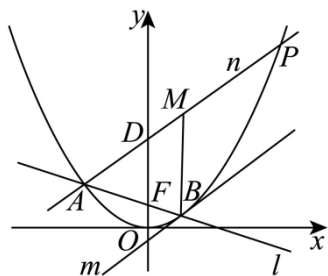
【分析】对于 A，设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$ ，联立抛物线方程用韦达定理即可判断；

对于 D，求得 $y' = \frac{1}{2}x$ ，则直线 m 的斜率为 $\frac{1}{2}x_2$ ，进而可得直线 n 的方程 $y = \frac{x_2}{2}x + y_1 + 2$ ，联立抛物线方程用韦达定理即可判断；

对于 B，过 B 作 y 轴平行线交 n 于 M ，结合 D 选项知， S_{VABP} 的面积等于 S_{VABM} 的 2 倍，根据直线 n 的方程可得 $M(x_2, \frac{x_2^2}{2} + y_1 + 2)$ ，可求 $|BM| = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + \frac{4}{x_1})^2$ ，进一步可求得 $S_{VABM} = \frac{1}{8} (|x_1| + \frac{4}{|x_1|})^3$ ，利用基本不等式结合 $S_{VABP} = 2S_{VABM}$ 即可判断。

对于 C，由直线 n 的方程可得 D 坐标，进一步可得 $|AF| = y_1 + 1$ ， $|DF| = y_1 + 1$ 即可判断；

【详解】



如图所示，切线记为 m ， PA 记为 n 。

对于 A，直线 l 的斜率存在，故设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 = 4y \\ y = kx + 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } x^2 - 4kx - 4 = 0, \Delta = 16k^2 + 16 > 0,$$

所以 $x_1x_2 = -4$ ，故 $y_1y_2 = \frac{1}{16}x_1^2x_2^2 = 1$ ，故 A 错误；

对于 D，因为 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，所以 $y' = \frac{1}{2}x$ ，则直线 m 的斜率为 $\frac{1}{2}x_2$ ，

故直线 n 的方程为 $y - y_1 = \frac{x_2}{2}(x - x_1)$ ，即 $y = \frac{x_2}{2}x + y_1 + 2$ ，

联立 $x^2 = 4y$ ，消去 y 得 $x^2 - 2x_2x - 2(y_1 + 2) = 0$ ，故 $x_1 + x_3 = 2x_2$ ，故 D 正确；

对于 B，不妨设 $x_1 < x_2$ ，过 B 作 y 轴平行线交 n 于 M ，根据 D 选项知， S_{VABP} 的面积等于 S_{VABM} 的 2 倍。（下面证明一下），

$$S_{VABP} = \frac{1}{2}|BM|(x_3 - x_1), \quad S_{VABM} = \frac{1}{2}|BM|(x_2 - x_1), \text{ 由 D 选项的证明知道 } x_1 + x_3 = 2x_2, \text{ 则}$$

$$S_{VABP} = \frac{1}{2}|BM|(2x_2 - x_1 - x_1) = |BM|(x_2 - x_1) = 2S_{VABM}$$

直线 n 的方程为 $y = \frac{x_2}{2}x + y_1 + 2$ ，当 $x = x_2$ 时， $M(x_2, \frac{x_2^2}{2} + y_1 + 2)$ ，

故 $|BM| = \frac{x_2^2}{2} + y_1 + 2 - y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + 2 = \frac{1}{4} \times (x_1 + \frac{4}{x_1})^2$ ，由 A 选项知 $x_2 = -\frac{4}{x_1}$ ，

$$\begin{aligned} \text{故 } S_{V_{ABM}} &= |\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \cdot \frac{1}{4} \cdot (x_1 + \frac{4}{x_1})^2| = |\frac{1}{8}(x_1 + \frac{4}{x_1})(x_1 + \frac{4}{x_1})^2| \\ &= \frac{1}{8}(|x_1| + \frac{4}{|x_1|})^3 \geq \frac{1}{8}(2\sqrt{|x_1| \cdot \frac{4}{|x_1|}})^3 = 8, \text{ 当且仅当 } |x_1| = \frac{4}{|x_1|}, \text{ 即 } |x_1| = 2 \text{ 时取等号,} \end{aligned}$$

即 $S_{V_{ABM}} \geq 8$ ，所以 $S_{V_{ABP}} = 2S_{V_{ABM}} \geq 16$ ，故 B 错误。

对于 C，由直线 n 的方程可得 $D(0, y_1 + 2)$ ， $|AF| = y_1 + 1$ ， $|DF| = y_1 + 1$ ，

所以 $|AF| = |DF|$ ，故 C 正确；

故选：CD.

5. $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ (a, b, c 非负)，则 $f(a, b, c)$ 的最大值和最小值是否存在？是多少？

【答案】存在最小值，最小值为 2，不存在最大值

【分析】由题意， a, b, c 中至多一个数为 0，不妨设 $c = 0$ ，可得 $f(a, b, c) \geq 2$ ，当 a, b, c 全不为 0 时，可得

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2, \text{ 从而可得有最小值 2, 由当 } a \rightarrow +\infty, b, c \rightarrow 0, \text{ 可得无最大值.}$$

【详解】由题意， a, b, c 中至多一个数为 0，不妨设 $c = 0$ ，

$$\text{则 } f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{b}{a}}} = 2, \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时取等号,}$$

当 a, b, c 全不为 0 时，

$$\sqrt{\frac{a^2}{a(b+c)}} \geq \sqrt{\frac{a^2}{[\frac{a+(b+c)}{2}]^2}} = \frac{2a}{a+b+c}, \text{ 当且仅当 } a = b+c \text{ 时取等号,}$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{b(a+c)}} \geq \sqrt{\frac{b^2}{[\frac{b+(a+c)}{2}]^2}} = \frac{2b}{a+b+c}, \text{ 当且仅当 } b = a+c \text{ 时取等号,}$$

$$\sqrt{\frac{c^2}{c(a+b)}} \geq \sqrt{\frac{c^2}{[\frac{c+(a+b)}{2}]^2}} = \frac{2c}{a+b+c}, \text{ 当且仅当 } c = a+b \text{ 时取等号,}$$

因为 $a = b+c$ ， $b = a+c$ ， $c = a+b$ ，不能同时成立，

$$\text{所以 } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2,$$

综上所述: $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$,

所以 $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ (a, b, c 非负) 有最小值, 最小值为 2;

当 $a \rightarrow +\infty, b, c \rightarrow 0$, 可得 $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \rightarrow +\infty$,

故 $f(a, b, c) = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ (a, b, c 非负) 无最大值.

6. $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$. 则 ()

A. 若 $f(x) = a$ 有两个解, 则 $0 < a < \frac{1}{e^2}$.

B. 若 $|f(x) + m|$ 有最小值, 则 $m \leq -\frac{1}{2e^2}$.

C. 若 $|f(x) + m|$ 有最小值, 则 $m < -\frac{1}{2e^2}$.

D. 若 $f(x) = a$ 有两个解 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 > 4$.

【答案】AD

【分析】求得 $f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$, 得出函数 $f(x)$ 的单调性和极值, 判定 A 正确; 当 $m \geq -\frac{1}{e^2}$ 时, 得到 $|f(x) + m|$ 取得最小值 0, 当 $m < -\frac{1}{e^2}$ 时, $|f(x) + m|_{\min} = -m - \frac{1}{e^2}$, 可判定 B、C 错误;

设 $g(x) = f(4-x) = \frac{3-x}{e^{4-x}}$, 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 利用导数求得 $F(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 得到

$f(x_2) > g(x_2)$, 进而转化为 $f(x_1) > f(4-x_2)$, 根据函数 $f(x)$ 的单调性, 求得 $x_1 > 4 - x_2$, 可判定 D 正确.

【详解】由函数 $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 可得 $f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$,

当 $x < 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 单调递减,

当 $x = 2$ 时, 函数取得极大值, 极大值为 $f(2) = \frac{1}{e^2}$,

且当 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, 当 $x < 1$ 时, $f(x) < 0$,

所以 $f(x) = a$ 有两个解, 则 $0 < a < \frac{1}{e^2}$, 所以 A 正确;

当 $m \geq -\frac{1}{e^2}$ 时, 方程 $f(x) + m = 0$ 恒有根, $|f(x) + m|$ 取得最小值 0 都成立;

当 $m < -\frac{1}{e^2}$ 时, $[f(x) + m]_{\min} = m + \frac{1}{e^2} < 0$, 所以 $|f(x) + m|_{\min} = -m - \frac{1}{e^2}$,

即 $m \in \mathbb{R}$ 时, $|f(x) + m|$ 恒有最小值, 所以 B、C 都不正确;

$$\text{设 } g(x) = f(4-x) = \frac{3-x}{e^{4-x}}, \text{ 令 } F(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-1}{e^x} - \frac{3-x}{e^{4-x}},$$

$$\text{可得 } F'(x) = \frac{2-x}{e^x} - \frac{2-x}{e^{4-x}} = \frac{(2-x)(e^4 - e^{2x})}{e^{x+4}},$$

当 $x > 2$ 时, $2-x < 0$ 且 $2x > 4$, 所以 $e^4 - e^{2x} < 0$, 可得 $F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 所以 $F(x) > F(2) = 0$,

所以在 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f(x) > g(x)$,

又由 $x > 2$ 时, $x-1 > 0, e^x > 0$, 所以 $f(x) > 0$, 且 $f(1) = 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递增,

又因为 $f(x) = a$ 有两个解 x_1, x_2 , 则 $f(x_1) = f(x_2) = a$,

不妨令 $x_1 < x_2$, 则 $1 < x_1 < 2 < x_2$,

由 $f(x_2) > g(x_2)$, 因为 $g(x_2) = f(4-x_2)$, 所以 $f(x_2) > f(4-x_2)$,

又因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以 $f(x_1) > f(4-x_2)$,

因为 $x_2 > 2$, 可得 $4-x_2 < 2$, 且 $x_1 < 2$, 且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 为单调递增函数,

所以 $x_1 > 4-x_2$, 所以 $x_1 + x_2 > 4$, 所以 D 正确.

故选: AD.

【点睛】方法总结: 利用导数证明或判定不等式问题:

- 1、通常要构造新函数, 利用导数研究函数的单调性与极值(最值), 从而得出不等关系;
 - 2、利用可分离变量, 构造新函数, 直接把问题转化为函数的最值问题, 从而判定不等关系;
 - 3、适当放缩构造法: 根据已知条件适当放缩或利用常见放缩结论, 从而判定不等关系;
 - 4、构造“形似”函数, 变形再构造, 对原不等式同解变形, 根据相似结构构造辅助函数.
7. 圆上 7 点所成线段中任取两条, 这两条线段无公共点的概率为?

【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】根据题意, 先求出形成多少条线段, 然后求出任取两条线段的种数, 再从中求出两条线段无公共点的种数, 结合古典概型求概率即可.

【详解】圆上 7 点形成 $C_7^2 = 21$ 条线段, 从中任取两条线段有 $C_{21}^2 = 210$ 种方法,

任意四个点对应两组不相交的线段, 故两条线段无公共点的有 $2C_7^4 = 70$ 种方法,

所以任取两条线段, 它们无公共点的概率为 $\frac{70}{210} = \frac{1}{3}$.

8. 复方程 $(z^3 + z)^2 + 9z^3 - 72z = 0$ 的所有复数根的平方和为?

【答案】 -4

【分析】将问题转化为求方程 $z^5 + 2z^3 + 9z^2 + z - 72 = 0$ 的所有复数根的平方和，然后使用韦达定理即可得到答案.

【详解】方程 $(z^3 + z)^2 + 9z^3 - 72z = 0$ 可化为 $z^6 + 2z^4 + 9z^3 + z^2 - 72z = 0$.

从而原方程的所有复数根的平方和等于方程 $z^5 + 2z^3 + 9z^2 + z - 72 = 0$ 的所有复数根的平方和.

设该方程的 5 个复数根为 z_1, z_2, \dots, z_5 ，则由韦达定理有 $\sum_{i=1}^5 z_i = 0$ ， $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} z_i z_j = 2$.

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^5 z_i^2 = \left(\sum_{i=1}^5 z_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} z_i z_j = 0 - 2 \times 2 = -4.$$

故原方程的所有复数根的平方和为 -4.

9. 已知 $\{\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\} = \{\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ ，则 α 可以是 ()

A. $\frac{\pi}{8}$

B. $-\frac{3\pi}{8}$

C. $-\frac{2\pi}{7}$

D. $-\frac{\pi}{14}$

【答案】 B

【分析】利用积化和差和辅助角公式得到 $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ，即可求解得到 $\alpha = \frac{2k\pi}{3}$ 或

$\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，可求答案.

【详解】Q $\{\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\} = \{\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ ，

$$\therefore \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha,$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} \times (\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha) = \sin \frac{\alpha}{2} \times (\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha),$$

$$\therefore \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \sin 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \sin 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos 3\alpha \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} + \cos \frac{5\alpha}{2} - \cos \frac{7\alpha}{2} = \sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{5\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{7\alpha}{2} - \sin \frac{5\alpha}{2},$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{7\alpha}{2} = \sin \frac{7\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{7\alpha}{2} + \cos \frac{7\alpha}{2},$$

$$\therefore \sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \left(\frac{7\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 3\alpha = 2k\pi \text{ 或 } \left(\frac{7\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 4\alpha + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 或 } \alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z},$$

\therefore 经检验, $\alpha = -\frac{3\pi}{8}$ 符合, 其它都不符合.

故选: B.

10. $x^3 + px^2 + q = 0$ 在 $(0, 2)$ 有解, 则 $p + q$ 可能的取值为?

【答案】 任意实数

【分析】 分 $x = 1$ 和 $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ 两种情况讨论, 当 $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ 时, 将 $x^3 + px^2 + q = 0$ 视为关于 p, q 的二元一次方程, 根据直线 $p + q = z$ 与 $px^2 + q + x^3 = 0$ 恒相交可得.

【详解】 将 $x^3 + px^2 + q = 0$ 视为关于 p, q 的二元一次方程 $px^2 + q + x^3 = 0$,

以 p 为横坐标, q 纵坐标, 则 $px^2 + q + x^3 = 0$ 表示斜率为 $-x^2$ 的直线,

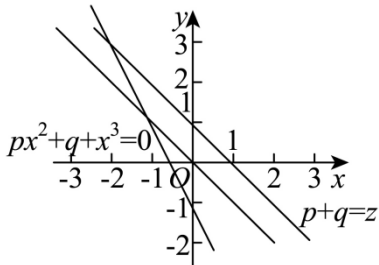
当 $x = 1$ 时, $p + q = -1$;

当 $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ 时, $-x^2 \in (-4, -1) \cup (-1, 0)$,

记 $p + q = z$, 则直线 $p + q = z$ 与 $px^2 + q + x^3 = 0$ 恒相交,

所以, $p + q = z \in \mathbb{R}$.

综上, $p + q$ 可能的取值为一切实数.



11. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 在 $(0, 2)$ 内有三个不等实根, 则 $p + q + r$ 的取值范围?

【答案】 $p + q + r \in (-2, 0)$

【分析】 根据 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 在 $(0, 2)$ 内有三个不等实根, 不妨设

$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, 则有 $x_1, x_2, x_3 \in (-2, 0)$. 代入 $x = 1$, 则

$f(1) = 1 + p + q + r = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$, 再结合范围求解即可.

【详解】 设 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$,

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 在 $(0, 2)$ 内有三个不等实根, $\therefore x_1, x_2, x_3 \in (0, 2)$.

且 $f(1) = 1 + p + q + r = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$,

设 $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$, $y_3 = 1 - x_3$, 则 $y_1, y_2, y_3 \in (-1, 1)$,

$\therefore y_1 y_2 y_3 \in (-1, 1)$, $\therefore 1 + p + q + r = y_1 y_2 y_3 \in (-1, 1)$,

$\therefore p + q + r \in (-2, 0)$.

12. $a + e^a = b + \ln b = 4$, 则 ()

A. $a \ln b + b \ln a > 1$

B. $a \ln b + b \ln a = 1$

C. $ab < 4$

D. $ab > e$

【答案】ACD

【分析】先利用 $f(x) = x + \ln x$ 的单调性证明 $e^a = b \in (e, 3)$, 然后直接得到 $ab > 1 \cdot e = e$, 并通过证明 $a + b = 4$, 得出 $ab < 4$, 即可验证 C, D 正确; 然后利用该范围直接估计出 $a \ln b + b \ln a$ 的下界, 即可得到 A 正确, B 错误.

【详解】对于 D, 构造 $f(x) = x + \ln x - 4$, 易得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

而 $f(e) = e + \ln e - 4 = e - 3 < 0$, $f(3) = 3 + \ln 3 - 4 = \ln 3 - 1 > 0$,

所以 $f(x) = 0$ 有唯一的正根, 且该根位于区间 $(e, 3)$,

因为 $a + e^a = b + \ln b = 4$, 所以 $f(e^a) = f(b) = 0$,

则 $e^a = b \in (e, 3)$, 故 $a \in (1, \ln 3)$, $b \in (e, 3)$.

所以 $ab > 1 \cdot e = e$, 故 D 正确;

对于 C, 而 $e^a = b$, $a + e^a = 4$, 故 $a + b = 4$, 而 $b > e > \ln 3 > a$,

所以有 $ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2) < \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 4$, 故 C 正确;

对于 AB, 由 $a, b > 1$, 知 $a, b, \ln a, \ln b \in (0, +\infty)$.

从而 $a \ln b + b \ln a > a \ln b > 1 \cdot \ln e = 1$, 故 A 正确, B 错误.

故选: ACD.

13. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, $z^n = z + \sqrt{2}$, 则 n 的最小值为?

【答案】3

【分析】先对 $n = 1$ 和 $n = 2$ 证明不存在满足条件的 z , 再对 $n = 3$ 证明 $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 满足条件, 即可得到 n 的最小值为 3.

【详解】若 $n = 1$, 则 $z = z^n = z + \sqrt{2}$, 得 $0 = \sqrt{2}$, 矛盾;

若 $n=2$, 则 $z^2 = z + \sqrt{2}$, 解得 $z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{4}}$.

故 z 是实数, 从而由 $|z|=1$ 知 $z = \pm 1$, 代入 $z^2 - z = \sqrt{2}$ 得 $0 = \sqrt{2}$ 或 $2 = \sqrt{2}$, 矛盾;

以上讨论表明, 必有 $n \geq 3$.

而当 $n=3$ 时, 对 $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, 有 $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$, 且有

$$z^n = z^3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot (-1+i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (2+2i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = z + \sqrt{2},$$

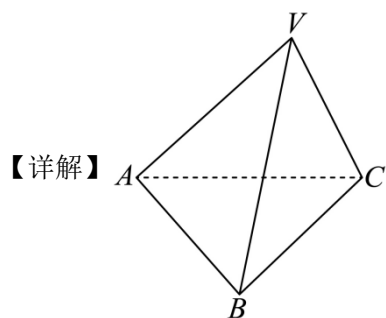
故满足条件.

所以 n 的最小值为 3.

14. 四面体 $V-ABC$ 中, $VA=VB=2\sqrt{2}$, $VC=3$, $CA=CB=4$. 求 CA 与 VB 所成角余弦的最值.

【答案】无最大值, 有最小值为 0.

【分析】根据数量积公式计算两直线夹角余弦值;



如图所示, 设 CA 与 VB 所成角为 θ , $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{Q } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{VB} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CV}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CV} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 4 \times 4 \times \cos(\pi - \angle BCA) - 3 \times 4 \times \cos(\pi - \angle VCA)$$

$$= -16 \times \cos \angle BCA + 12 \times \cos \angle VCA$$

$$= -16 \times \cos \angle BCA + 12 \times \frac{3^2 + 4^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 3 \times 4}$$

$$= -16 \times \cos \angle BCA + \frac{17}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{VB}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{VB}|} = \left| \frac{-16 \times \cos \angle BCA + \frac{17}{2}}{4 \times 2\sqrt{2}} \right| = \left| -\sqrt{2} \cos \angle BCA + \frac{17\sqrt{2}}{32} \right|,$$

$$\text{在 } \triangle VBC \text{ 中, } \cos \angle BCA = \frac{4^2 + 4^2 - AB^2}{2 \times 4 \times 4} = \frac{32 - AB^2}{32} = 1 - \frac{AB^2}{32},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/845303140104011242>