

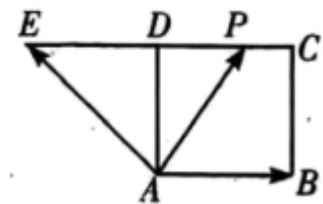
四川省成都市嘉祥教育集团 2023 年高三下第四次（5 月）月考数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，延长 CD 至 E ，使得 $DE = CD$ ，点 P 在线段 CD 上运动。设 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AE}$ ，则 $x + y$ 的取值范围是（ ）



- A. $[1, 2]$ B. $[1, 3]$ C. $[2, 3]$ D. $[2, 4]$

2. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E ， F ， G 分别是棱 AD ， CC_1 ， C_1D_1 的中点，给出下列四个命题：

- ① $EF \perp B_1C$ ；
- ② 直线 FG 与直线 A_1D 所成角为 60° ；
- ③ 过 E ， F ， G 三点的平面截该正方体所得的截面为六边形；
- ④ 三棱锥 $B - EFG$ 的体积为 $\frac{5}{6}$ 。

其中，正确命题的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数， $g(x)$ 是 R 的奇函数，且 $g(x) = f(x-1)$ ，则 $f(2019)$ 的值为（ ）

- A. 2 B. 0 C. -2 D. ± 2

4. 2020 年是脱贫攻坚决战决胜之年，某市为早日实现目标，现将甲、乙、丙、丁 4 名干部派遣到 A 、 B 、 C 三个贫困县扶贫，要求每个贫困县至少分到一人，则甲被派遣到 A 县的分法有（ ）

- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 36 种

5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+4 \geq 0, \\ x-2 \leq 0, \\ x+y-2 \geq 0, \end{cases}$ 且 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$

6. 若函数 $f(x) = |\ln x|$ 满足 $f(a) = f(b)$, 且 $0 < a < b$, 则 $\frac{4a^2 + b^2 - 4}{4a + 2b}$ 的最小值是 ()

- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

7. 已知集合 $A = \{x \mid -1 < x, 2\}, B = \{x \mid 1, -x, 5\}$, 定义集合 $A * B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$, 则 $B * (A * B)$ 等于 ()

- A. $\{x \mid -6 < x, 1\}$ B. $\{x \mid 1 < x, 12\}$
C. $\{x \mid -11 < x, 0\}$ D. $\{x \mid -5 < x, 6\}$

8. 泰山有“五岳之首”“天下第一山”之称, 登泰山的路线有四条: 红门盘道徒步线路, 桃花峪登山线路, 天外村汽车登山线路, 天烛峰登山线路. 甲、乙、丙三人在聊起自己登泰山的线路时, 发现三人走的线路均不同, 且均没有走天外村汽车登山线路, 三人向其他旅友进行如下陈述:

甲: 我走红门盘道徒步线路, 乙走桃花峪登山线路;

乙: 甲走桃花峪登山线路, 丙走红门盘道徒步线路;

丙: 甲走天烛峰登山线路, 乙走红门盘道徒步线路;

事实上, 甲、乙、丙三人的陈述都只对一半, 根据以上信息, 可判断下面说法正确的是 ()

- A. 甲走桃花峪登山线路 B. 乙走红门盘道徒步线路
C. 丙走桃花峪登山线路 D. 甲走天烛峰登山线路

9. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $x \pm 2y = 0$ B. $2x \pm y = 0$ C. $4x \pm y = 0$ D. $x \pm 4y = 0$

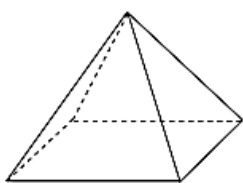
10. 已知复数 z 满足 $z(1+i) = 4-3i$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

11. 将一块边长为 a cm 的正方形薄铁皮按如图 (1) 所示的阴影部分裁下, 然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器, 将该容器按如图 (2) 放置, 若其正视图为等腰直角三角形, 且该容器的容积为 $72\sqrt{2}$ cm³, 则 a 的值为 ()



(1)



(2)

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

12. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长相等, $\angle ABC = 60^\circ$, 则直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正切值等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - \left| \left(\frac{k+17}{4} \right)x + 2 \right|, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = k \left(x - \frac{4}{3} \right)$, 其中 $k > 0$. 若存在唯一的整数 x , 使得

$f(x) < g(x)$, 则实数 k 的取值范围是_____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 2)$, 若向量 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 共线, 则 $k =$ _____.

15. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = -3$, 则该双曲线的离心率为_____.

16. 函数 $f(x) = \cos x - \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 的零点个数为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且点 $(n, S_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 在函数 $y = 2^{x+1} - 2$ 的图像上;

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

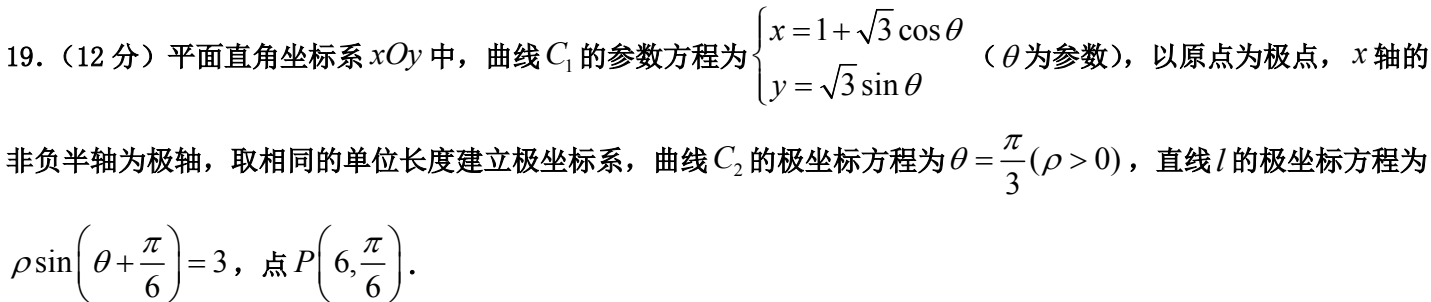
(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = 0$, $b_{n+1} + b_n = a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3) 在第 (2) 问的条件下, 若对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围;

18. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, BD 交 AC 于点 E , F 是线段 PC 中点, G 为线段 EC 中点.

(I) 求证: $FG \parallel$ 平面 PBD ;

(II) 求证: $BD \perp FG$.



非负半轴为极轴，取相同的单位长度建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho > 0)$ ，直线 l 的极坐标方程为

$$\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 3, \text{ 点 } P\left(6, \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) 若直线 l 与曲线 C_2 交于点 A , 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于点 B , 求 $\triangle PAB$ 的面积.

$$\square\square = 2$$

(I)证明: $\square \square \perp \square \square$;

(II)求直线与平面所成角的正弦值.

21. (12分) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $g(x) = x - \ln(x+1)$ ($e = 2.71828\ldots$ 是自然对数的底数).

(I) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数;

(II) 若 $a=1$, 且命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq kg(x)$ ”是假命题, 求实数 k 的取值范围.

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1)求 $\sin\left(\frac{A+C}{2}+B\right)$ 的值;

(2)若 $b = \sqrt{3}$ ，求 $c - a$ 的取值范围.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

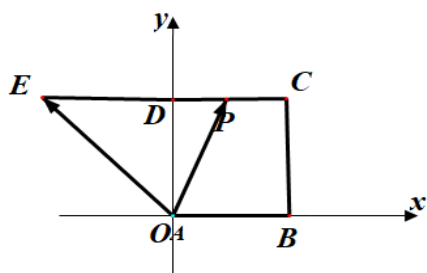
1、C

【解析】

以 A 为坐标原点，以 AB, AD 分别为 x 轴， y 轴建立直角坐标系，利用向量的坐标运算计算即可解决。

【详解】

以 A 为坐标原点建立如图所示的直角坐标系，不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，



则 $B(1,0)$ ， $E(-1,1)$ ，设 $P(t,1)(0 \leq t \leq 1)$ ，则 $(t,1) = x(1,0) + y(-1,1)$ ，所以 $t = x - y$ ，且 $y = 1$ ，

故 $x + y = t + 2 \in [2,3]$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查利用向量的坐标运算求变量的取值范围，考查学生的基本计算能力，本题的关键是建立适当的直角坐标系，是一道基础题。

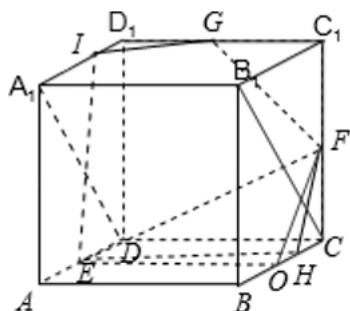
2、C

【解析】

画出几何体的图形，然后转化判断四个命题的真假即可。

【详解】

如图；

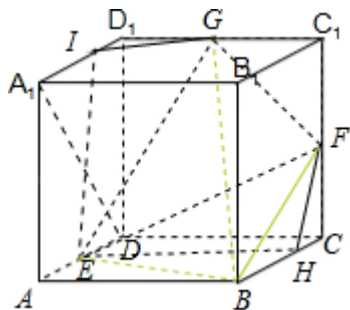


连接相关点的线段， O 为 BC 的中点，连接 EFO ，因为 F 是中点，可知 $B_1C \perp OF$ ， $EO \perp B_1C$ ，可知 $B_1C \perp$ 平面 EFO

，即可证明 $B_1C \perp EF$ ，所以①正确；

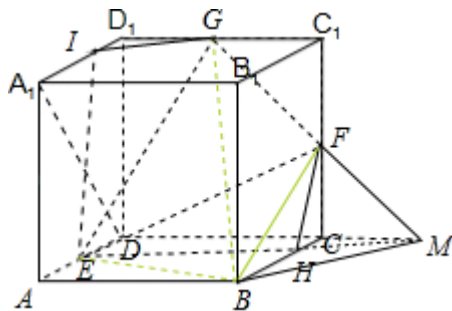
直线 FG 与直线 A_1D 所成角就是直线 A_1B 与直线 A_1D 所成角为 60° ；正确；

过 E, F, G 三点的平面截该正方体所得的截面为五边形；如图：



是五边形 $EHFGI$ 。所以③不正确；

如图：



三棱锥 $B-EFG$ 的体积为：

由条件易知 F 是 GM 中点，

所以 $V_{B-EFG} = V_{B-EFM} = V_{F-BEM}$ ，

而 $S_{BEM} = S_{\text{梯形}ABMD} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle EDM} = \frac{2+3}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{5}{2}$ ，

$V_{F-BEM} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{6}$ 。所以三棱锥 $B-EFG$ 的体积为 $\frac{5}{6}$ ，④正确；

故选：C。

【点睛】

本题考查命题的真假的判断与应用，涉及空间几何体的体积，直线与平面的位置关系的应用，平面的基本性质，是中档题。

3、B

【解析】

根据函数的奇偶性及题设中关于 $g(x)$ 与 $f(x-1)$ 关系，转换成关于 $f(x)$ 的关系式，通过变形求解出 $f(x)$ 的周期，进而算出 $f(2019)$ 。

【详解】

Q $g(x)$ 为 R 上的奇函数, $\therefore g(0) = f(-1) = 0, g(-x) = -g(x)$

$$\therefore f(-1) = 0, f(-x-1) = -f(x-1), \therefore f(-x) = -f(x-2)$$

而函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数, $\therefore f(x) = f(-x), \therefore f(x) = -f(x-2)$

$$\therefore f(x-2) = -f(x-4), \therefore f(x) = f(x-4)$$

故 $f(x)$ 为周期函数, 且周期为 4

$$\therefore f(2019) = f(-1) = 0$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了函数的奇偶性, 函数的周期性的应用, 属于基础题.

4、B

【解析】

分成甲单独到 A 县和甲与另一人一同到 A 县两种情况进行分类讨论, 由此求得甲被派遣到 A 县的分法数.

【详解】

如果甲单独到 A 县, 则方法数有 $C_3^2 \times A_2^2 = 6$ 种.

如果甲与另一人一同到 A 县, 则方法数有 $C_3^1 \times A_2^2 = 6$ 种.

故总的方法数有 $6 + 6 = 12$ 种.

故选: B

【点睛】

本小题主要考查简答排列组合的计算, 属于基础题.

5、A

【解析】

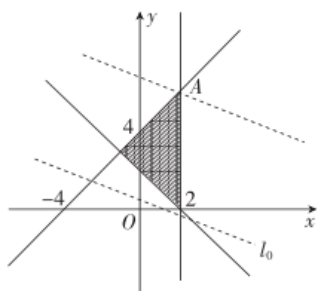
画出约束条件的可行域, 利用目标函数的最值, 判断 a 的范围即可.

【详解】

作出约束条件表示的可行域, 如图所示. 因为 $z = ax + y$ 的最大值为 $2a + 6$, 所以 $z = ax + y$ 在点 $A(2, 6)$ 处取得最大值,

则 $-a \leq 1$, 即 $a \geq -1$.

故选: A



【点睛】

本题主要考查线性规划的应用，利用 z 的几何意义，通过数形结合是解决本题的关键。

6、A

【解析】

由 $f(a) = f(b)$ 推导出 $b = \frac{1}{a}$ ，且 $0 < a < 1$ ，将所求代数式变形为 $\frac{4a^2 + b^2 - 4}{4a + 2b} = \frac{2a + b}{2} - \frac{4}{2a + b}$ ，利用基本不等式

求得 $2a + b$ 的取值范围，再利用函数的单调性可得出其最小值。

【详解】

Q 函数 $f(x) = |\ln x|$ 满足 $f(a) = f(b)$ ， $\therefore (\ln a)^2 = (\ln b)^2$ ，即 $(\ln a - \ln b)(\ln a + \ln b) = 0$ ，

Q $0 < a < b$ ， $\therefore \ln a < \ln b$ ， $\therefore \ln a + \ln b = 0$ ，即 $\ln(ab) = 0 \Rightarrow ab = 1$ ，

$\therefore 1 = ab > a^2$ ，则 $0 < a < 1$ ，

由基本不等式得 $2a + b = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $a = \frac{1}{2}$ 时，等号成立。

$$Q \frac{4a^2 + b^2 - 4}{4a + 2b} = \frac{(2a + b)^2 - 4ab - 4}{2(2a + b)} = \frac{(2a + b)^2 - 8}{2(2a + b)} = \frac{2a + b}{2} - \frac{4}{2a + b},$$

由于函数 $y = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$ 在区间 $[2\sqrt{2}, +\infty)$ 上为增函数，

所以，当 $2a + b = 2\sqrt{2}$ 时， $\frac{4a^2 + b^2 - 4}{4a + 2b}$ 取得最小值 $\frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{2\sqrt{2}} = 0$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查代数式最值的计算，涉及对数运算性质、基本不等式以及函数单调性的应用，考查计算能力，属于中等题。

7、C

【解析】

根据 $A * B$ 定义，求出 $A * B$ ，即可求出结论。

【详解】

因为集合 $B = \{x \mid 1, -x, 5\}$, 所以 $B = \{x \mid -5, x, -1\}$,

则 $A * B = \{x \mid -6 < x, 1\}$, 所以 $B * (A * B) = \{x \mid -11 < x, 0\}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查集合的新定义运算, 理解新定义是解题的关键, 属于基础题.

8、D

【解析】

甲乙丙三人陈述中都提到了甲的路线, 由题意知这三句中一定有一个是正确另外两个错误的, 再分情况讨论即可.

【详解】

若甲走的红门盘道徒步线路, 则乙, 丙描述中的甲的去向均错误, 又三人的陈述都只对一半, 则乙丙的另外两句话丙走红门盘道徒步线路”, “乙走红门盘道徒步线路”正确, 与“三人走的线路均不同”矛盾.

故甲的另一句乙走桃花峪登山线路”正确, 故丙的乙走红门盘道徒步线路”错误, “甲走天烛峰登山线路”正确. 乙的话中甲走桃花峪登山线路”错误, “丙走红门盘道徒步线路”正确.

综上所述, 甲走天烛峰登山线路, 乙走桃花峪登山线路, 丙走红门盘道徒步线路

故选: D

【点睛】

本题主要考查了判断与推理的问题, 重点是找到三人中都提到的内容进行分类讨论, 属于基础题型.

9、A

【解析】

试题分析: 渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, 整理后就得到双曲线的渐近线.

解: 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

其渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

整理得 $x \pm 2y = 1$.

故选 A.

点评: 本题考查了双曲线的渐进方程, 把双曲线的标准方程中的“1”转化成“1”即可求出渐进方程. 属于基础题.

10、B

【解析】

利用复数的除法运算化简 z , 复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 $|z|$, 利用模长公式即得解.

【详解】

由题意知复数 z 在复平面中对应的点到原点的距离为 $|z|$,

$$z = \frac{4-3i}{1+i} = \frac{(4-3i)(1-i)}{2} = \frac{1-7i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

故选: B

【点睛】

本题考查了复数的除法运算, 模长公式和几何意义, 考查了学生概念理解, 数学运算, 数形结合的能力, 属于基础题.

11、D

【解析】

推导出 $PM + PN = a$, 且 $PM = PN$, $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $PM = \frac{a}{2}$, 设 MN 中点为 O , 则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 由此能表

示出该容器的体积, 从而求出参数的值.

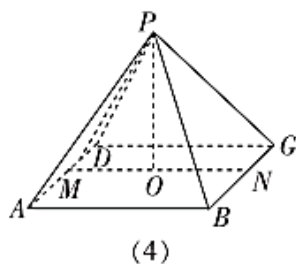
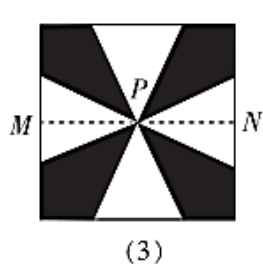
【详解】

解: 如图 (4), $\triangle PMN$ 为该四棱锥的正视图, 由图 (3) 可知, $PM + PN = a$, 且 $PM = PN = \frac{a}{2}$, 由 $\triangle PMN$ 为等腰直角三角形可知,

$$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \text{ 设 } MN \text{ 中点为 } O, \text{ 则 } PO \perp \text{ 平面 } ABCD, \therefore PO = \frac{1}{2}MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a,$$

$$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3 = 72\sqrt{2}, \text{ 解得 } a = 12.$$

故选: D



【点睛】

本题考查三视图和锥体的体积计算公式的应用, 属于中档题.

12、D

【解析】

以 A 为坐标原点, AE 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴, AA_1 所在直线为 z 轴,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/846012225125010105>