高一数学（沪教版2020必修第二册）

第 8 章 平面向量

8.2向量的数量积的定义与运算律（第2课时）

学习目标

1. 掌握平面向量数量积的坐标表示.

2. 能够用两个向量的坐标来解决与向量的模、夹角、垂直有关的问题.

2　向量的数量积的定义与运算律

模仿功的定义，设$\vec{a}$与$\vec{b}$是两个非零向量，定义$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积（scalar product）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle,$$

即$\vec{a}\cdot\vec{b}$是$\vec{a}$的模$|\vec{a}|$、$\vec{b}$的模$|\vec{b}|$与$\vec{a}$、$\vec{b}$夹角$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$的余弦的乘积

在这个公式中，$|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$就是$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的数量投影，

而$|\vec{a}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$就是$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的数量投影.

我们约定可以把$\vec{a}\cdot\vec{a}$简记为$\vec{a}^2$，它其实就是$|\vec{a}|^2$.

我们还规定零向量与任意向量的数量积为 0

有了这个定义，物理中的功w就是力向量$\vec{f}$与位移向量$\vec{s}$的数量积$\vec{f}\cdot\vec{s}$

例3 如图8-2-6，给定边长为6的正三角形ABC，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

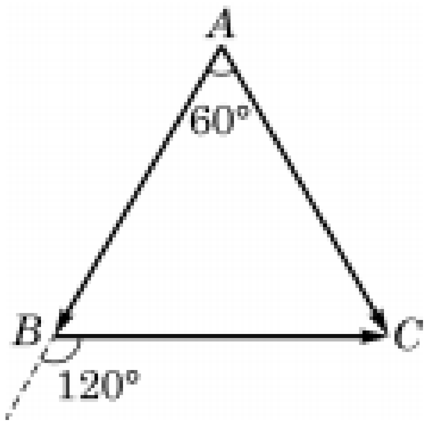


图 8-2-6

解 因为$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=60°$，所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60°=6\times 6\times\frac{1}{2}=18;$$

又因为$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=120°$，所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 120°=6\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-18.$$

类比数的乘法的运算律，我们可以证明向量的数量积运算满足如下运算律

设$\vec{a}$，$\vec{b}$和$\vec{c}$是向量，λ是实数，则

向量数量积的交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

向量数量积对数乘的结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

向量数量积对加法的分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

证明（1）因为$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle=\langle \vec{b},\vec{a}\rangle$，所以结论是显然的.

（2）如果$\vec{a}$和$\vec{b}$有一个是零向量，或者$\lambda=0$，那么结论是显然的，从而不妨设$\vec{a}$和$\vec{b}$都是非零向量，且$\lambda\neq 0$. 若$\lambda>0$，则$|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$，$\langle \lambda\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$；若$\lambda<0$，则$|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$，$\langle \lambda\vec{a},\vec{b}\rangle=\pi-\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$，两种情况代入数量积定义公式，都得到

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

再利用向量数量积的交换律，就得到$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

（3）如果$\vec{a}=\vec{0}$，那么结论是显然的，从而不妨设$a\neq 0$．把$\vec{b}$、$\vec{c}$和$\vec{b}+\vec{c}$在$\vec{a}$的方向作投影，根据向量和的投影等于它们投影的和，就得到

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

由于数量积的交换律和分配律与数的乘法类似，容易证明如下的公式.

例 4　证明：

（1）$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

（2）$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2.$

证明　（1）的证明如下：

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2&=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\\&=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2\\&=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\end{aligned}$$

由(1)类似可证：

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

对于（2），我们有

$$\begin{aligned}&\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\\&=\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2\\&=\vec{a}^2-\vec{b}^2.\end{aligned}$$

若$\vec{a}$与$\vec{b}$均为非零向量，则由向量的数量积的定义，可从数量积来反推向量夹角的公式.

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

在8.3节中我们将利用向量的坐标（从而不通过向量的夹角）直接来计算向量的数量积，而上面的公式就提供了计算向量夹角的有效方法． 由向量的数量积的定义，可以得到：

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}$当且仅当$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

（2）$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，当且仅当$\vec{a}//\vec{b}$ 时等号成立

当$\vec{a}$与$\vec{b}$平行且同向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$；当$\vec{a}$与$\vec{b}$平行且反向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$. 特别地，$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

例 5 设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$， $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$。求$|3\vec{a}-2\vec{b}|$

解 因为

$$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=(3\vec{a}-2\vec{b})^2$$
$$=(3\vec{a})^2-2(3\vec{a})\cdot(2\vec{b})+(2\vec{b})^2$$
$$=9\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2$$
$$=9|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{b}|^2$$
$$=9\times2^2-12\times2\times3\times\frac{1}{2}+4\times3^2$$
$$=36,$$

所以$|3\vec{a}-2\vec{b}|=6$

例 6 已知$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-9\sqrt{2}$. 求 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

解：因为$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-9\sqrt{2}}{6\times3}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{3\pi}{4}$

未弄清向量的夹角而弄错

坑① 已知$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=2\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=-\vec{a}+3\vec{b}$，求向量$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角.

【错解】 由已知得$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-2\vec{b}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-\vec{a}+3\vec{b})-2\vec{b}=-\vec{a}+\vec{b}$,

显然$\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{BC}$共线，故它们的夹角为0°.

【正解】 由已知得$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-2\vec{b}$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-\vec{a}+3\vec{b})-2\vec{b}=-\vec{a}+\vec{b}$,

显然$\overrightarrow{BA}=-2\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{BC}$共线，

因为它们是反向共线，故夹角为180°

为什么错

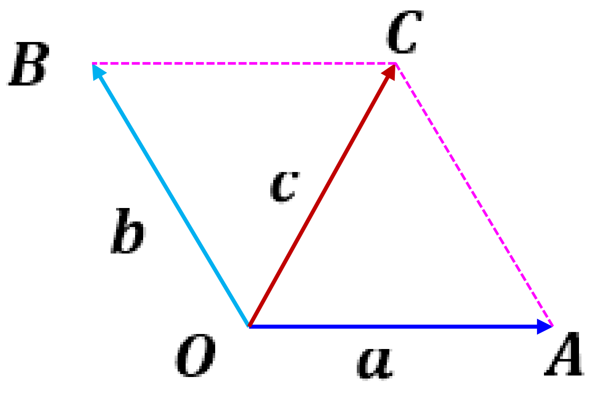
两个向量共线分为同向共线与反向共线两种情况，对应的夹角分别是0°和180°，不要弄错.

【1】设非零向量a,b,c满足$|a|=|b|=|c|, a+b=c$，则a与b的夹角为（　　）.

A. 150°　　B. 120°　　C. 60°　　D. 30°

【解】$\because |a|=|b|=|c|, a+b=c$

如图所示就是符合题意的向量，



根据题意有ΔACO和ΔBCO都是是等边三角形，

所以∠AOB=60°+60°=120°

即向量$\boldsymbol{a}$与b的夹角是120°，选B

平面几何性质运用不准确

坑② 在ΔABC中，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$|\overrightarrow{CA}|=6$，$\angle BCA=60°$，求$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$

【错解】$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|cos60°=5\times6\times\frac{1}{2}=15$

【正解】$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|cos(180°-60°)$

$$=5\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-15$$

为什么错

判断两个向量的夹角，应先把两个向量移动到同一起点，BC与CA的夹角是∠BCA的补角.

【2】平面向量$a.b.c$两两夹角都相等．且$|a| = |b| = 1. |c| = 2.$ 求$|a + 2b + c|.$

【解】由题意，可得任意两个向量的夹角都是0°或120°

当a, b, c两两夹角为0°时， a, b, c方向相同

则$|a + 2b + c| = 1 + 2 \times 1 + 2 = 5$

当a, b, c两两夹角为120°时， 由于$|a| = |b| = 1, |c| = 2,$ 则有

$$= 12 + 4 \times 1^2 + 4 \times 1 \times 1 \times cos120° + 2 \times 1 \times 2 \times cos120° + 4 \times 1 \times 2 \times cos120°$$

$$= 1$$

课本练习

练习8．2（2）

1．在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由．

2．填空题：

（1）设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=9$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$，则$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$

（2）设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=6$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=21$，则$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$

3．设向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，且$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=120^\circ$．求$|\vec{a}+\vec{b}|$．

随堂检测

1.已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{b}-2\vec{a}|=\sqrt{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（ **C** ）

A.$-\frac{1}{2}$　　B.-2　　C.$\frac{1}{2}$　　D.2

【解析】解：因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{b}-2\vec{a}|=\sqrt{3}$，

两边同时平方得，$\vec{b}^2+4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，

故$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$．

故选：C．

2.已知 $\vec{a}=(\lambda，2)$， $\vec{b}=(3，-5)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角θ是钝角，则λ的取值范围是（ **D** ）

A. $(-\infty，\frac{10}{3}]$

B. $(-\infty，\frac{10}{3})$

C. $(-\infty，\frac{6}{5})\cup(\frac{6}{5}，\frac{10}{3})$

D. $(-\infty，-\frac{6}{5})\cup(-\frac{6}{5}，\frac{10}{3})$

【解析】解： $\vec{a}=(\lambda，2)$，$\vec{b}=(3，-5)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角θ是钝角

$\therefore \vec{a}\bullet\vec{b}<0$，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，即 $\begin{cases}3\lambda-2\times5<0\\-5\lambda-2\times3\neq0\end{cases}$，

解得 $\lambda\in(-\infty，-\frac{6}{5})\cup(-\frac{6}{5}，\frac{10}{3})$.

故选：D.