专题 03 函数的概念与性质

考点一：函数的概念

1．（2023·北京）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x+a}$．若 $y=f\left(x\right)$ 的图象经过原点，则 $f\left(x\right)$ 的定义域为（　）

A．$\left[0,+\infty\right)$　　　　B．$\left[-\infty,0\right)$

C．$\left[1,+\infty\right)$　　　　D．$\left[-\infty,1\right)$

【答案】A

【分析】利用点在函数的图象上及偶次根式有意义即可求解.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x+a}$ 的图象经过原点，

所以 $\sqrt{0+a}=0$，解得 $a=0$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的解析式为 $f\left(x\right)=\sqrt{x}$.

要使 $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ 有意义，只需要 $x\geq 0$，

所以 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[0,+\infty\right)$.

故选：A.

2．（2023·河北）函数 $f(x)=\sqrt{x(x+2)}$ 的定义域是（　）

A．$\left[0,2\right]$　　　　B．$\left[-2,0\right]$

C．$\left(-\infty,0\right]\cup\left[2,+\infty\right)$　　　　D．$\left(-\infty,-2\right]\cup\left[0,+\infty\right)$

【答案】D

【分析】根据函数解析式可得 $x(x+2)\geq 0$，再利用一元二次不等式解法即可求得定义域.

【详解】根据函数定义域可知 $x(x+2)\geq 0$，解得 $x\geq 0$ 或 $x\leq -2$；

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-2\right]\cup\left[0,+\infty\right)$.

故选：D

3．（2023·江苏）函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$\left(-\infty,1\right]$　　B．$\left(-\infty,1\right)$　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left(1,+\infty\right)$

【答案】D

【分析】函数定义域满足 $\dfrac{1}{x-1}\geq 0$，$x-1\neq 0$，解得答案.

【详解】函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ 的定义域满足：$\dfrac{1}{x-1}\geq 0$，$x-1\neq 0$，解得 $x>1$.

故选：D

4. （2023春·湖南）函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ 的定义域是（　）

A．$\left(0,+\infty\right)$　　B．$\left[0,+\infty\right)$　　C．$\left[1,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,+\infty\right)$

【答案】B

【分析】由函数解析式有意义列式求解，

【详解】由题意得 $x\geq 0$，即 $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ 的定义域是 $\left[0,+\infty\right)$

故选：B

5. （2023·云南）函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为（　）

A．$\left[-2,3\right]$　　B．$\left(-2,3\right)$　　C．$\left[-2,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,3\right]$

【答案】A

【分析】解不等式 $\begin{cases}3-x\geq 0\\ x+2\geq 0\end{cases}$ 得出函数 $f\left(x\right)$ 的定义域.

【详解】要使得 $f\left(x\right)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}$ 有意义，则 $\begin{cases}3-x\geq 0\\ x+2\geq 0\end{cases}$，解得 $-2\leq x\leq 3$.

则函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-2,3\right]$.

故选：A

6. （2022春·浙江）函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}$ 的定义域是（　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left[1,+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,-1\right)$　　D．$\left[-1,+\infty\right)$

【答案】D

【分析】根据函数特征得到不等式，求出定义域.

【详解】$\because x+1\geq 0$，

$\therefore x\geq -1$，即函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $\left[-1,+\infty\right)$.

故选：D.

7. （2022秋·浙江）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域是

A．$\{x\mid x<2\}$　　B．$\{x\mid x>2\}$　　C．R　　D．$\{x\mid x\neq 2\}$

【答案】D

【分析】由 $x-2\neq 0$，即可得出定义域.

【详解】Q $x-2\neq 0$

$\therefore x\neq 2$

即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 2\}$

故选：D

8. （2021秋·浙江）函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\frac{1}{x+2}$ 的定义域是（　）

A．$[-3,+\infty)$　　B．$(-3,+\infty)$

C．$[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$　　D．$[-3,2)\cup(2,+\infty)$

【答案】C

【解析】根据函数解析式，列不等式组 $\begin{cases}x+3\geq 0\\x+2\neq 0\end{cases}$ 求解即可.

【详解】根据题意可得 $\begin{cases}x+3\geq 0\\x+2\neq 0\end{cases}$，所以 $x\in[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$.

故选：C.

9. （2021秋·福建）函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$(-1,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．R

【答案】B

【分析】根据函数定义域的求法，求得 $f(x)$ 的定义域.

【详解】$x-1>0,x>1$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$.

故选：B

10. （2021·北京）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f(x)$ 的定义域是__________.

【答案】$[0,+\infty)$ / $(x(x\geq 0))$

【分析】根据偶数次方根号里的数大于等于零即可得出答案.

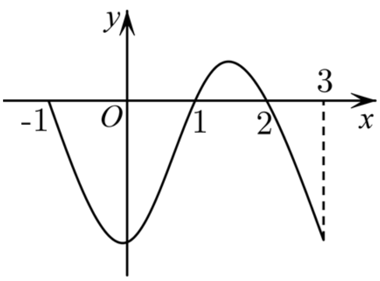
【详解】解：由函数 $f(x)=\sqrt{x}$，得 $x\geq 0$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$.

故答案为：$[0,+\infty)$.

考点二：函数的表示

1. （2022·北京）函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为（　）



A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

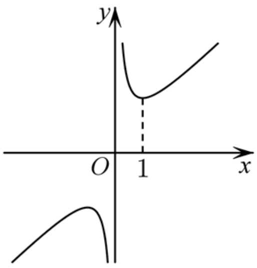
【答案】C

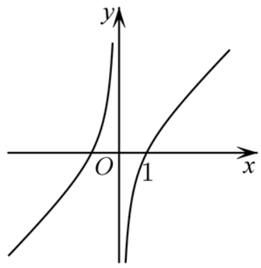
【分析】结合图象确定正确选项.

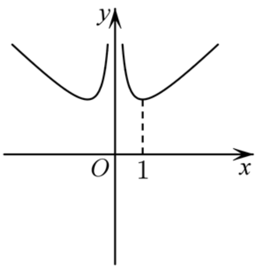
【详解】由图象可知，当$x\in(1,2)$时，$f(x)>0$.

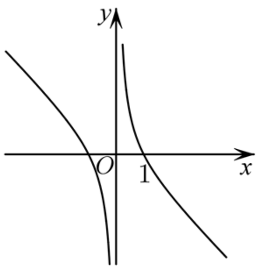
故选：C

2. （2022 秋·福建）函数$y=x+\dfrac{1}{x}$的图象大致为（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【分析】根据函数$y=x+\dfrac{1}{x}$的奇偶性以及值域即可解出.

【详解】因为$y=f(x)=x+\dfrac{1}{x}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq 0\}$，且$f(-x)=-f(x)$，所以函数$y=x+\dfrac{1}{x}$为奇函数，其图象关于原点对称，所以排除 C；又当$x>0$时，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq 2$，当且仅当$x=1$时取等号，所以排除 B，D.

故选：A.

3. （2021·北京）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0\\ x+2, x<0\end{cases}$，则$f(2)=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】D

【分析】根据分段函数解析式计算可得；

【详解】解：因为$f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0\\ x+2, x<0\end{cases}$，所以$f(2)=2^2=4$

故选：D

4. （2021 秋·吉林）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\leq 0\\ 2x, x>0\end{cases}$，则$f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$（　）

A．2　　B．$-\frac{5}{2}$　　C．$\frac{5}{4}$　　D．-1

【答案】A

【分析】根据分段函数解析式求得正确答案.

【详解】$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(2\times\frac{1}{2}\right)=f(1)=2\times1=2$.

故选：A

5．（2023·云南）函数$f(x)=\begin{cases}-x,x<0\\x,x\geq0\end{cases}$，则$f(3)=$________.

【答案】3

【分析】根据给定的分段函数，代入计算作答.

【详解】函数$f(x)=\begin{cases}-x,x<0\\x,x\geq0\end{cases}$，所以$f(3)=3$.

故答案为：3

6．（2022春·广西）已知函数$f(x)=x^2+2$，那么$f(1)=$_________.

【答案】3

【分析】直接根据函数解析式可求出结果.

【详解】因为$f(x)=x^2+2$，所以$f(1)=1^2+2=3$.

故答案为：3.

7．（2021秋·福建）若$f(x+1)=(x+1)^2$，则$f(2)=$_________.

【答案】4

【分析】根据解析式，令$x=1$求解即可.

【详解】因为$f(x+1)=(x+1)^2$，

所以$f(2)=f(1+1)=(1+1)^2=4$，

故答案为：4

8．（2022·北京）已知函数$f(x)=\begin{cases}2x,x<0,\\\sqrt{x},x\geq0,\end{cases}$则$f(-1)=$_______；方程$f(x)=1$的解为_______.

【答案】　　－2　　1

【分析】根据分段函数的性质求解即可.

【详解】$f(-1)=2\times(-1)=-2$；

$x<0$时，$f(x)<0$，故$f(x)=1>0$时，$x\geq0$，则$\sqrt{x}=1$，解得$x=1$.

故答案为：－2；1.

9．（2022·北京）已知函数$f(x)=x^2+mx+1$（m是常数）的图象过点$(1,2)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)求不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集．

【答案】(1) $f(x)=x^2+1$；

(2) $(0,2)$．

【分析】（1）把点代入解析式可得 $m=0$，即得；

（2）利用一元二次不等式的解法即得.

【详解】（1）由题意， $f(1)=m+2=2$，

所以 $m=0$．

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^2+1$．

（2）不等式 $f(x)<2x+1$ 等价于 $x^2-2x<0$．

解得 $0<x<2$．

所以不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集为 $(0,2)$．

10. （2021·吉林）已知函数 $f(x)=ax^2+2x+c\left(a、c\in\mathrm{N}^*\right)$ 满足：① $f(1)=5$；② $6<f(2)<11$.

（1）求 a， c 的值；

（2）若对任意的实数 $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，都有 $f(x)-2mx\le 1$ 成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1） $a=1$， $c=2$；（2） $m\ge\frac{9}{4}$.

【解析】（1）把条件① $f(1)=5$；② $6<f(2)<11$，代入到 $f(x)$ 中求出 a、c 即可；

（2）不等式 $f(x)-2mx\le 1$ 恒成立，设 $g(x)=f(x)-2mx=x^2+2(1-m)x+2$

则分 $-\frac{2(1-m)}{2}\le 1$， $-\frac{2(1-m)}{2}>1$ 两种情况讨论，只需 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{29}{4}-3m\le 1$ 即可.

【详解】（1）$\because$ $f(x)=ax^2+2x+c\left(a,c\in\mathrm{N}^*\right)$，

满足 $f(1)=5$，

可得 $a+2+c=5$，

即 $a+c=3$，

$\because 6<f(2)<11$，

$\therefore 6<4a+4+c<11$，

即 $6<4a+4+3-a<11$，

$\therefore -1<3a<4$，

$\therefore -\frac{1}{3}<a<\frac{4}{3}$，

$\because a,c\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore\ a=1$，$c=2$；

（2）由（1）得 $f\left(x\right)=x^2+2x+2$，

设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2mx=x^2+2\left(1-m\right)x+2$，

①当 $-\dfrac{2\left(1-m\right)}{2}\leq 1$，

即 $m\leq 2$ 时，

$g\left(x\right)_{\max}=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{29}{4}-3m$，

故只需 $\dfrac{29}{4}-3m\leq 1$，

解得 $m\geq\dfrac{25}{12}$，与 $m\leq 2$ 不合，舍去；

②当 $-\dfrac{2\left(1-m\right)}{2}>1$，

即 $m>2$ 时，$g\left(x\right)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{13}{4}-m$，

故只需 $\dfrac{13}{4}-m\leq 1$，

解得 $m\geq\dfrac{9}{4}$，又 $m>2$，

故 $m\geq\dfrac{9}{4}$

综上，m 的取值范围为 $m\geq\dfrac{9}{4}$.

考点三：函数的单调性与最大（小）值

1．（2023·河北）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right]$ 上是增函数，且 $f\left(-1\right)=0$，则使 $f\left(x\right)>0$ 的 x 的取值范围是（　）

A．$\left(-1,0\right)$　　B．$\left(0,1\right)$　　C．$\left(-1,1\right)$　　D．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【答案】C

【分析】使用函数的奇偶性和单调性进行求解即可.

【详解】$\because f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在区间 $\left(-\infty,0\right]$ 上单调递增，且 $f(-1)=0$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，且 $f\left(1\right)=f\left(-1\right)=0$，

$\therefore$当 $x\in\left(-\infty,0\right]$ 时，$f(x)>0\Leftrightarrow 0=f\left(-1\right)<f\left(x\right)\Leftrightarrow -1<x\leq 0$，

当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f\left(1\right)=0\Leftrightarrow 0<x<1$，

综上所述，x 的取值范围是 $(-1,1)$.

故选：C.

2．（2023·山西）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数是（　）

A．$y=-x^2+4$　　B．$y=3-x$

C．$y=\frac{1}{x}$　　D．$y=|x|$

【答案】D

【分析】A.由二次函数的性质判断；B.由一次函数的性质判断；C.由反比例函数的性质判断；D.由 $y=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$ 判断；

【详解】A．$y=-x^2+4$ 由二次函数的性质得，该函数是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故错误；

B．$y=3-x$ 由一次函数的性质得，该函数不是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故错误；

C．$y=\frac{1}{x}$ 由反比例函数的性质得，该函数不是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故错误；

D．$y=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$，设 $f(x)=|x|$，定义域为 R，关于原点对称，且 $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$，则该函数是偶函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故正确；

故选：D.

3．（2023·云南）已知函数 $f(x)=x^2-2x,x\in[2,5]$，则函数的最大值为（　）

A．15　　B．10　　C．0　　D．-1

【答案】A

【分析】根据给定函数的单调性，求出在指定区间上的最大值作答.

【详解】函数 $f(x)=x^2-2x$ 在 $[2,5]$ 上单调递增，则 $f(x)_{\max}=f(5)=5^2-2\times5=15$，

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 15.

故选：A

4．（2023 春·新疆）下列函数在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A．$y=x+1$　　B．$y=\frac{2}{x}$

C．$y=2^x$　　D．$y=\ln x$

【答案】B

【分析】根据各选项中的函数解析式，直接判断单调性作答.

【详解】对于 A，一次函数 $y=x+1$ 在 **R** 上单调递增，A 不是；

对于 B，反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，B 是；

对于 C，指数函数 $y=2^x$ 在 **R** 上单调递增，C 不是；

对于 D，对数函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，D 不是.

故选：B

5．（2022 秋·浙江）已知函数 $f(x)=x^2-2ax+b$ 在区间（-∞，1]是减函数，则实数 a 的取值范围是（　）

A．[1，+∞）　　B．（-∞，1]　　C．[-1，+∞）　　D．（-∞，-1]

【答案】A

【分析】由对称轴与 1 比大小，确定实数 a 的取值范围.

【详解】$f(x)=x^2-2ax+b$ 对称轴为 $x=a$，开口向上，要想在区间（-∞，1]是减函数，所以 $a\in[1,+\infty)$.

故选：A

6．（2022·湖南）下列函数中，在 $(0,1)$ 为减函数的是（　）

A．$y=x^{-1}$　　B．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　C．$y=x^2$　　D．$y=x^3$

【答案】A

【分析】根据导函数的正负来判断原函数的单调性即可求解.

【详解】对于 $y=x^{-1}$，$y'=-\dfrac{1}{x^2}<0$，所以在 $(0,1)$ 为减函数，对于 $y=x^{\frac{1}{2}}$，$y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$，所以在 $(0,1)$ 单调递增，

$y=x^2$，$y'=2x>0$，$y=x^3$，$y'=3x^2>0$，故在 $(0,1)$ 单调递增.

故选：A

7．（2022 春·贵州）函数 $f(x)=x^2-1$ 的单调递增区间是（　）

A．$(-\infty,-3)$　　B．$[0,+\infty)$

C．$(-3,3)$　　D．$(-3,+\infty)$

【答案】B

【分析】直接由二次函数的单调性求解即可.

【详解】由 $f(x)=x^2-1$ 知，函数为开口向上，对称轴为 $x=0$ 的二次函数，则单调递增区间是 $[0,+\infty)$.

故选：B.

8．（2021·吉林）偶函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上单调递减，则函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上（　）

A．单调递增，且有最小值 $f(1)$　　B．单调递增，且有最大值 $f(1)$

C．单调递减，且有最小值 $f(2)$　　D．单调递减，且有最大值 $f(2)$

【答案】A

【分析】根据偶函数的性质分析即得解.

【详解】解：偶函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上单调递减，

则由偶函数的图象关于 y 轴对称，则有 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

即有最小值为 $f(1)$，最大值 $f(2)$.

对照选项，A 正确.

故选：A

9．（2021 春·福建）下列函数中，在其定义域上为单调递减的函数是（　）

A． $y=-2x+1$　　　　　　　　B． $y=x^2+1$

C． $y=\sqrt{x}$　　　　　　　　　D． $y=2^x$

【答案】A

【分析】利用指数函数，幂函数相关知识直接进行判断

【详解】$y=-2x+1$ 在 R 上单调递减，A 正确；

$y=x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 B 错误；

$y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 错误；

$y=2^x$ 在 R 上单调递增，D 错误

故选：A

10．（2021 春·贵州）已知函数 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$，若 $f(x)\le m$ 对任意 $x\in[1,4]$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　）

A． $(-\infty,-3)$　　B． $(-\infty,-3]$　　C． $(3,+\infty)$　　D． $[3,+\infty)$

【答案】D

【分析】先判断出 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$ 在 $x\in[1,4]$ 单调递增，求出 $f(x)_{\max}$，即可求出实数 m 的范围.

【详解】因为 $y=x$ 在 $x\in[1,4]$ 单调递增，$y=-\dfrac{4}{x}$ 在 $x\in[1,4]$ 单调递增，

所以 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$ 在 $x\in[1,4]$ 单调递增.

所以 $f(x)_{\max}=f(4)=4-\dfrac{4}{4}=3$.

因为 $f(x)\le m$ 对任意 $x\in[1,4]$ 恒成立，所以 $m\ge f(x)_{\max}=3$.

故选：D

11．（2021 春·浙江）若函数 $f(x)=x|x-a|(0\le x\le 2)$ 的最大值是 1，则实数 a 的值是_______.

【答案】$\dfrac{3}{2}$ 或 2

【分析】将函数写成分段函数形式，再分 $a\le 0$ 和 $a>0$ 讨论.当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 单调递增，由此求出 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)$；当 $a>0$ 时，又需要分 $\dfrac{a}{2}\ge 2$，$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}a\le 2$ 和 $\dfrac{a}{2}<2<\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}a$ 三种情况分别讨论，分别求出 $f(x)$ 的最大值，求解出 a 的值即可.

分 $a<0$，$0\le a\le 2$，$a>2$ 三种情况，分别研究分段函数的单调性，求出 $f(x)$ 的最大值，列式求解 a

的值即可.

【详解】$f\left(x\right)=x|x-a|=\begin{cases}-x^2+ax, & x<a\\ x^2-ax, & x\ge a\end{cases}$,

(1)当 $a\le 0$ 时,因为 $0\le x\le 2$,则 $x\ge a$ 成立,

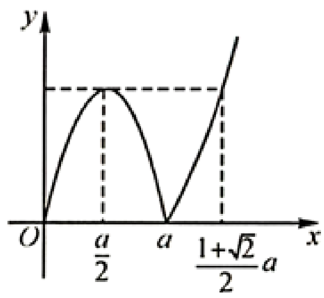
故 $f\left(x\right)=x|x-a|=x^2-ax=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$,

对称轴为 $x=\frac{a}{2}\le 0$,则 $f\left(x\right)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增,

$f\left(x\right)_{\max}=f\left(2\right)=4-2a=1$

所以 $a=\frac{3}{2}$,与 $a\le 0$ 矛盾,故舍去;

(2)当 $a>0$ 时,$f\left(x\right)$ 的大致图像如下:



可求得 $f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}a\right)$

①当 $\frac{a}{2}\ge 2$,即 $a\ge 4$ 时,

$f\left(x\right)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增,$f\left(x\right)_{\max}=f\left(2\right)=-2^2+2a=1$

则 $a=\frac{5}{2}$,与 $a\ge 4$ 矛盾,故舍去;

②当 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}a\le 2$,即 $0<a\le 4(\sqrt{2}-1)$ 时,

$f\left(x\right)$ 在 $[0,\frac{a}{2}]$ 单调递增,$(\frac{a}{2},a]$ 单调递减,$(a,2]$ 单调递增,

且 $f\left(2\right)\ge f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}a\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)$,

则 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(2\right)=2^2-2a=1$,

解得 $a=\frac{3}{2}$,与 $0<a\le 4(\sqrt{2}-1)$ 相符;

③当 $\frac{a}{2}<2<\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$,即 $4(\sqrt{2}-1)<a<4$ 时,

$f(x)_{max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=-(\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}=1$，

解得 $a=2$，与 $4(\sqrt{2}-1)<a<4$ 相符.

综上所述，a 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 2.

故答案为：$\frac{3}{2}$ 或 2.

12．（2022 春·天津）已知函数 $f(x)=x^2-4ax+a$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $f(1)=4$，求 a 的值；

(2)当 $a=1$ 时，

（i）根据定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增；

（ii）记函数 $g(x)=\begin{cases}f(x),x\geq 0\\-f(x)-8x,x<0\end{cases}$，若 $g(b+3)=g(b)-3$，求实数 b 的值.

【答案】(1) -1

(2)（i）证明见解析；（ii）$b=0$ 或 $b=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

【分析】（1）根据函数值直接代入求参即可；

（2）（i）任取 $x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，从而证明 $f(x_1)>f(x_2)$ 即可；

（ii）根据题意研究该分段函数单调性，根据 $g(b+3)=g(b)-3$ 分类讨论求值即可.

【详解】（1）因为函数 $f(x)=x^2-4ax+a$，所以 $f(1)=1-4a+a=4$，

解得 $a=-1$，所以 a 的值为 -1

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-4x+1$，

（i）任取 $x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1{}^2-4x_1+1)-(x_2{}^2-4x_2+1)=x_1{}^2-x_2{}^2+4(x_2-x_1)$

$=(x_1+x_2-4)(x_1-x_2)$，

因为 $x_1>x_2>2$，所以 $x_1+x_2-4>0, x_1-x_2>0$，

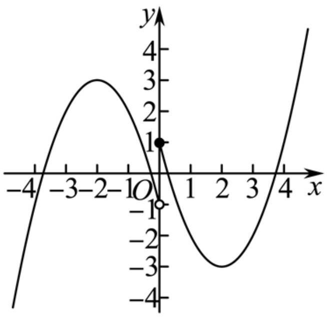
所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增

（ii）由题意得，$g(x)=\begin{cases}x^2-4x+1,x\geq 0\\-x^2-4x-1,x<0\end{cases}$，

函数在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 单调递增，在 $(-2,0)$ 和 $(0,2)$ 单调递减，

作出函数图像如下图所示，



若 $g(b+3)=g(b)-3$， 显然 $b+3>b$，

①$b+3>b\geq 0$， 即 $b\geq 0$ 时，

$(b+3)^2-4(b+3)+1=b^2-4b+1-3$， 解得 $b=0$， 符合题意；

②$0>b+3>b$， 即 $b<-3$ 时，

$-(b+3)^2-4(b+3)-1=-b^2-4b-1-3$， 解得 $b=-3$， 不符合题意；

③$b+3\geq 0>b$， 即 $-3\leq b<0$ 时，

$(b+3)^2-4(b+3)+1=-b^2-4b-1-3$， 即 $b^2+3b+1=0$，

解得 $b=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$， 均符合题意.

综上所述， $b=0$ 或 $b=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

13. （2021 春·天津）已知函数 $f(x)=x^2-(a+1)x+a$， $a\in\mathrm{R}$.

(1)当 $f(0)=1$，求 a；

(2)当 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，问 a 的取值范围；

(3)设 $m(x)$ 为 $f(x)$ 和 $1-f(x)$ 中的较小者，证明 $m(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$.

【答案】(1) $a=1$

(2) $a\leq 1$

(3)证明见解析

【分析】（1）代入函数值，直接求 a；（2）比较对称轴和定义域的关系，即可根据不等式求 a 的取值范围；（3）根据函数 $y=f(x)$ 和函数 $y=1-f(x)$ 的对称性，确定函数 $m(x)$ 的最大值，并讨论在区间 $[0,2]$ 上恒包含最大值点，即可证明.

【详解】（1）$\because f(x)=x^2-(a+1)x+a$， $\therefore f(0)=a=1$；

（2）$\because f(x)=x^2-(a+1)x+a$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a+1}{2}$，

函数开口向上，并且在区间$[1,2]$上单调递增，

$\therefore \frac{a+1}{2} \le 1$，得$a \le 1$；

（3）函数$y = x^2 - (a+1)x + a$，开口向上，关于直线$x = \frac{a+1}{2}$对称，

函数$y = 1 - f(x)$，开口向下，也关于直线$x = \frac{a+1}{2}$对称，

并且$y = f(x)$与$y = 1 - f(x)$关于$y = \frac{1}{2}$对称，

当$f(x) = 1 - f(x)$时，即$x^2 - (a+1)x + a = \frac{1}{2}$，

解得：$x = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$或$x = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$，

当$x \le \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$或$x \ge \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$，$m(x) = 1 - f(x)$，

当$\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2} < x < \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$时，$m(x) = f(x)$，

$m(x)$在$x = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$或$x = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+3}}{2}$时，取得最大值$\frac{1}{2}$，

当$a > 1$时，$(a+1)^2 - (a^2 - 2a + 3) = 4a - 2 > 0$，即$\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2} > 0$

要证明$\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2} < 2$，即证明$a - 3 < \sqrt{a^2-2a+3}$，

当$1 < a$£3时，不等式恒成立，

当$a > 3$时，即证明$(a-3)^2 < a^2 - 2a + 3$，即$a > \frac{3}{2}$恒成立，

所以当$a > 1$时，$0 < \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a+3}}{2} < 2$，即$m(x)$在区间$[0,2]$能取得最大值$\frac{1}{2}$；

当$a < 1$时，要证明$\frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+3}}{2} > 0$，即证明$\sqrt{a^2-2a+3} > -a-1$，

若$-1 \le a < 1$，不等式恒成立，

若$a < -1$，即证明$a^2 - 2a + 3 > a^2 + 2a + 1$，即$a < \frac{1}{2}$，即恒成立，

要证明$\frac{a+1+\sqrt{a^2-2a+3}}{2} < 2$，即证明$\sqrt{a^2-2a+3} < 3 - a$，

两边平方得$a^2 - 2a + 3 < a^2 - 6a + 9$，即$a < \frac{3}{2}$，即不等式恒成立，