合肥工业大学本科生教学

《弹性力学》

第七章

空间问题的基本理论

主讲教师：袁海平 (副教授、博士后)

第七章　空间问题的基本理论

内容提要

徐芝纶院士(1911-1999)

弹性力学简要教程(第三版)

一、平衡微分方程

二、物体内任一点的应力状态

三、主应力　最大与最小的应力

四、几何方程及物理方程

五、轴对称问题的基本方程

例题

一 平衡微分方程

在空间问题中，应力、形变和位移等基本知函数共有15个，且均为x,y,z的函数。

空间问题的基本方程，边界条件，以及按位移求解和按应力求解的措施，都是与平面问题相同的。所以，许多问题能够从平面问题推广得到。

一 平衡微分方程

取出微小的平行六面体，$dV=dxdydz$，

考虑其平衡条件：

$$\sum F_x = 0,$$

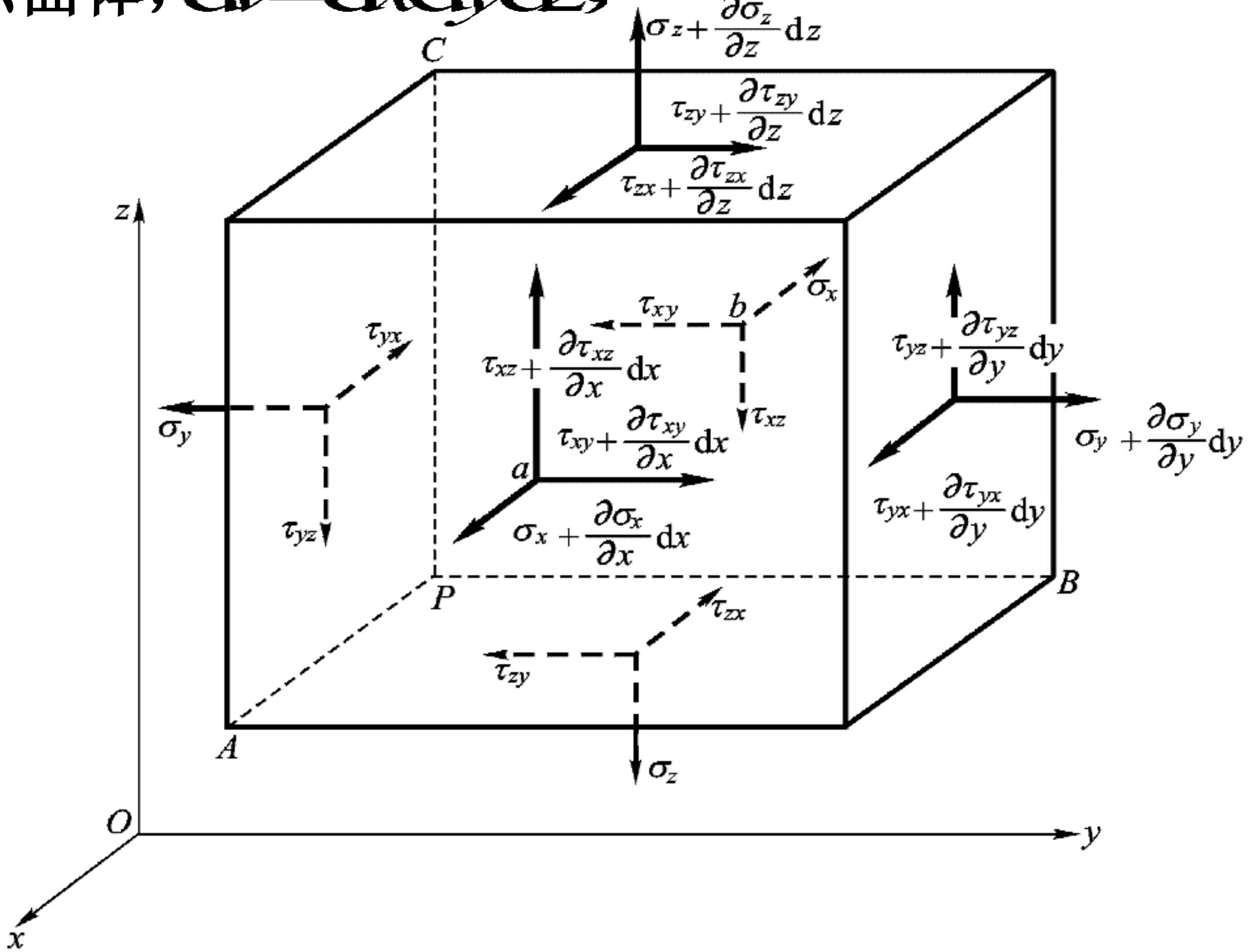
$$\sum F_y = 0,$$

$$\sum F_z = 0,$$

$$\sum M_x = 0,$$

$$\sum M_y = 0,$$

$$\sum M_z = 0$$



一 平衡微分方程

由x 轴向投影力的平衡微分方程可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0 \end{cases}$$

因为 x,y,z 轴相互垂直，均为定向，量纲均为L，所以 x,y,z 坐标具有对等性，其方程也必然具有对等性。

一 平衡微分方程

由3个力矩方程得到3个**切应力互等定理**，

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

空间问题的平衡微分方程精确到三阶微量(dxdydz)。

第七章　空间问题的基本理论

内容提要

徐芝纶院士(1911-1999)

弹性力学简要教程(第三版)

一、平衡微分方程

二、物体内任一点的应力状态

三、主应力　最大与最小的应力

四、几何方程及物理方程

五、轴对称问题的基本方程

例题

二 物体内任一点的应力状态

在空间问题中，一样需要处理：由直角坐标的应力分量σ_x ⋯ τ_{yz}⋯，来求出斜面（法线为 n' ）上的应力。

二 物体内任一点的应力状态

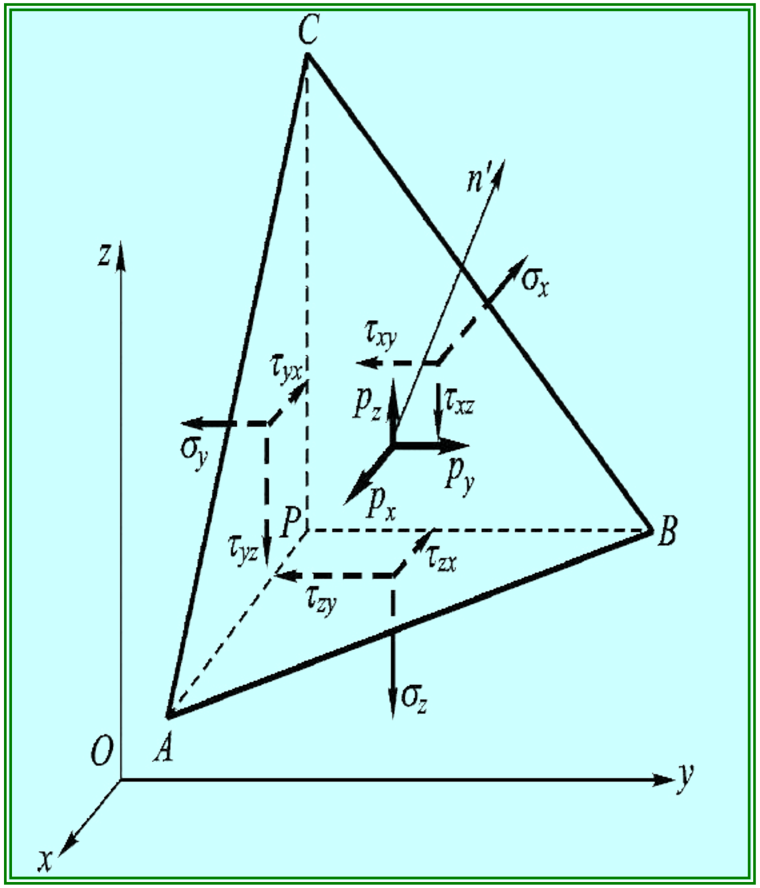
斜面的全应力$\boldsymbol{p}$ 可表达为两种分量形式：

$\boldsymbol{p}$沿坐标向分量：

$$\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z).$$

$\boldsymbol{p}$沿法向和切向分量：

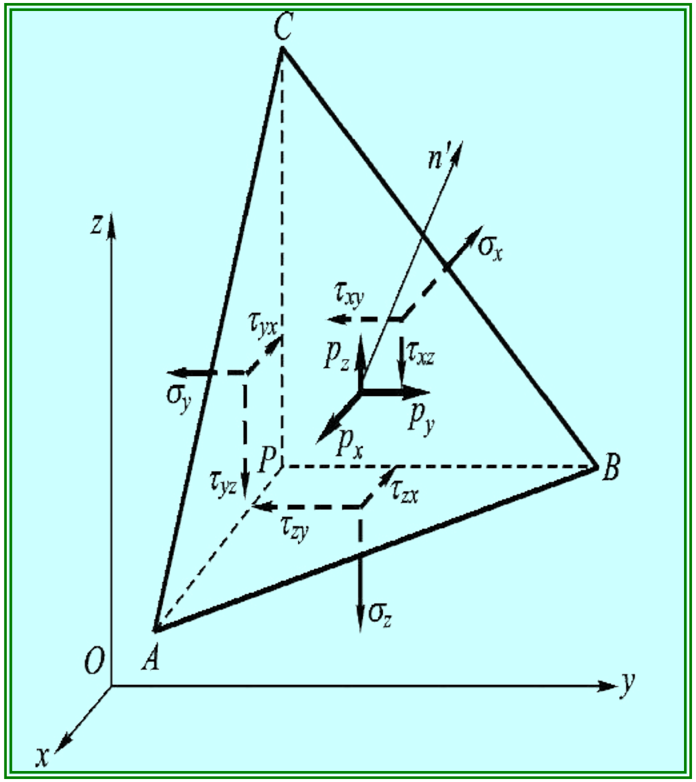
$$\boldsymbol{p}=(\sigma_n,\tau_n).$$



二 物体内任一点的应力状态

1. 求 $p=(p_x, p_y, p_z)$

取出如图的包括斜面的微分四面体，斜面面积为ds, 则x面，y面和z面的面积分别为lds, mds, nds。



由四面体的力平衡条件可得

$$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ p_y = m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} \\ p_z = n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} \end{cases}$$

2. 求$p=(\sigma_n,\tau_n)$

将$\mathbf{p}=(p_x,p_y,p_z)$向法向n'投影，即得

$$\sigma_n = l p_x + m p_y + n p_z$$

$$= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl$$

由 $$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$$

得 $$\tau_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2$$

3. 在 s_σ 上的应力边界条件

设在 s_σ 边界上，给定了面力分量 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$，则可将微分四面体移动到边界点上，并使斜面与边界重叠。斜面应力分量（p_x, p_y, p_z）应代之为面力分量（$\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$），从而得出**空间问题的应力边界条件:**

$$\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx})_s = \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y \\ (n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz})_s = \bar{f}_z \end{cases}$$

第七章　空间问题的基本理论

内容提要

徐芝纶院士(1911-1999)

弹性力学简要教程(第三版)

一、平衡微分方程

二、物体内任一点的应力状态

三、主应力　最大与最小的应力

四、几何方程及物理方程

五、轴对称问题的基本方程

例题

三 主应力 最大与最小的应力

1. 假设 n' 面 (l, m, n) 为主面，则此斜面上

$$\tau_n = 0,\ p = \sigma_n = \sigma$$

斜面上沿坐标向的应力分量为：

$$p_x = l\sigma,\ p_y = m\sigma,\ p_z = n\sigma$$

代入 p_x, p_y, p_z ，得到：

三 主应力 最大与最小的应力

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= l\sigma \\ m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} &= m\sigma \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} &= n\sigma \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

考虑方向余弦关系式，有

$$\boxed{l^2 + m^2 + n^2 = 1} \quad \text{(b)}$$

结论：式(a) , (b)是求主应力及其方向余弦的方程。

2. 求主应力 σ

将式(a)改写为：

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma)l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=0,\\ \tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{zy}n=0,\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n=0。\end{aligned}\right\}$$

三 主应力 最大与最小的应力

上式是求解 *l* , *m* , *n* 的齐次代数方程。因为*l* , *m* , *n*不全为0，所以其系数行列式必须为零，得

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix}=0,$$

展开，即得求主应力的方程，

$$\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2-\tau_{xy}^2)\sigma$$

$$-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2+2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy})=0 \qquad (\mathrm{c})$$

三 主应力 最大与最小的应力

3. 应力主向

设主应力 σ_1 的主向为 l_1, m_1, n_1。代入式(a)中的前两式，整顿后得

$$
\left.\begin{aligned}
&\tau_{yx}\frac{m_1}{l_1}+\tau_{zx}\frac{n_1}{l_1}+(\sigma_x-\sigma_1)=0,\\
&(\sigma_y-\sigma_1)\frac{m_1}{l_1}+\tau_{zy}\frac{n_1}{l_1}+\tau_{xy}=0
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(d)}
$$

三 主应力 最大与最小的应力

由上两式解出 $\frac{m_1}{l_1}, \frac{n_1}{l_1}$。然后由式(b)得出

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}} \qquad (e)$$

再求出 m_1 及 n_1。

4. 一点至少存在着三个相互垂直的主应力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ （证明见书上）。

5. 应力不变量

若从式(c) 求出三个主应力 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ，则式(c)也能够用根式方程表达为，

$$(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)=0$$

因式(c) 和(f)是等价的方程，故 σ 的各幂次系数应相等，从而得出：

三 主应力 最大与最小的应力

$$
\left.\begin{aligned}
\Theta_1 &= \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z,\\
\Theta_2 &= \sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1=\sigma_y\sigma_z+\\
&\qquad \sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2-\tau_{xy}^2,\\
\Theta_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\\
&\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2+2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}.
\end{aligned}\right\} \quad (g)
$$

式(g)中的各式，左边是不随坐标选择而变的；而右边各项虽与坐标的选择有关，但其和也应与坐标选择无关。

所以分别称 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ 为第一、二、三应力不变量。这些不变量常用于塑性力学之中。

6. 有关一点应力状态的结论：

(1) 6个坐标面上的应力分量完全拟定一点的应力状态。只要6个坐标面上的应力分量拟定了，则经过此点的任何面上的应力也完全拟定并可求出。

(2) 一点存在着3个相互垂直的应力主面及主应力。

(3) 3个主应力包括了此点的最大和最小正应力。

(4) 一点存在3个应力不变量 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

(5) 最大和最小切应力为 $\pm\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$.

设 $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$，作用于经过中间主应力、而且“平分最大和最小正应力的夹角”的平面上。

第七章　空间问题的基本理论

内容提要

徐芝纶院士(1911-1999)

弹性力学简要教程(第三版)

一、平衡微分方程

二、物体内任一点的应力状态

三、主应力 最大与最小的应力

四、几何方程及物理方程

五、轴对称问题的基本方程

例题

四 几何方程及物理方程

空间问题的几何方程，能够从平面问题推广得出：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{a}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/846132140155010240