

3.1.2 椭圆几何性质

【考点梳理】

考点一：椭圆的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$
范围	$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b, -a \leq y \leq a$
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0),$ $B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a),$ $B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
轴长	短轴长 = $2b$, 长轴长 = $2a$	
焦点	$(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$	$(0, \pm\sqrt{a^2 - b^2})$
焦距	$ F_1F_2 = 2\sqrt{a^2 - b^2}$	
对称性	对称轴: x 轴、 y 轴 对称中心: 原点	
离心率	$e = \frac{c}{a} \in (0, 1)$	

考点二：直线与椭圆的位置关系

直线 $y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ 的位置关系的判断方法：联立 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$

消去 y 得到一个关于 x 的一元二次方程．直线与椭圆的位置关系、对应一元二次方程解的个数及 Δ 的取值的关系如表所示．

直线与椭圆	解的个数	Δ 的取值
两个不同的公共点	两解	$\Delta \geq 0$
一个公共点	一解	$\Delta = 0$
没有公共点	无解	$\Delta < 0$

重难点技巧：弦长的两种方法

(1) 求出直线与椭圆的两交点坐标，用两点间距离公式求弦长．

(2) 联立直线与椭圆的方程，消元得到关于一个未知数的一元二次方程，利用弦长公式： $|P_1P_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$ (或 $|P_1P_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$)，其中 $x_1, x_2 (y_1, y_2)$ 是上述一元二次方程的两根，由根与系数的关系求出两根之和与两根之积后代入公式可求得弦长。

【题型归纳】

题型一：椭圆的焦点、焦距、顶点，长、短轴

1. (2023 秋·高二) 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{25-k} = 1 (0 < k < 9)$ 的关系为 ()

- A. 有相同的长轴长与短轴长 B. 有相同的焦距
C. 有相同的焦点 D. 有相同的离心率

【答案】B

【分析】利用椭圆的方程分别求出两个方程的 a, b, c 的值以及焦点所在位置，即可判断每个选项的正误。

【详解】对于椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，则 $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = 4$ ，且焦点在 x 轴上，

所以长轴长为 10，短轴长为 6，焦距为 8，焦点为 $(\pm 4, 0)$ ，离心率为 $\frac{4}{5}$ ，

对于椭圆 $\frac{x^2}{9-k} + \frac{y^2}{25-k} = 1$ ，因为 $0 < k < 9$ ，则 $0 < 9-k < 9 < 16 < 25-k < 25$ ，

可得 $a_2 = \sqrt{25-k}, b_2 = \sqrt{9-k}, c_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = 4$ ，且焦点在 y 轴上，

所以长轴长为 $2\sqrt{25-k} < 10$ ，短轴长为 $2\sqrt{9-k} < 6$ ，焦距为 8，焦点为 $(0, \pm 4)$ ，离心率为 $\frac{4}{\sqrt{25-k}} > \frac{4}{5}$ ，

所以 A、C、D 错误，B 正确。

故选：B。

2. (2022 秋·江苏南京·高二校考期末) 曲线 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (9 < k < 25)$ 有共同的 ()

- A. 长轴长 B. 短轴长 C. 离心率 D. 焦距

【答案】D

【分析】根据椭圆和双曲线的简单性质，分别求出曲线 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (9 < k < 25)$

的长轴长、短轴长、实轴长、虚轴长、离心率和焦距，由此能求出结果。

【详解】 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中：

长轴长 $= 2\sqrt{25} = 10$ ，短轴长 $= 2\sqrt{9} = 6$ ，

离心率 $= \frac{\sqrt{25-9}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$, 焦距 $= 2\sqrt{25-9} = 8$.

曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (9 < k < 25)$ 中:

实轴长 $= 2\sqrt{25-k}$, 虚轴长 $= 2\sqrt{k-9}$,

离心率 $= \frac{2\sqrt{25-k+k-9}}{2\sqrt{25-k}} = \frac{4}{\sqrt{25-k}}$,

焦距 $= 2\sqrt{25-k+k-9} = 8$.

$\therefore$ 曲线 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1 (9 < k < 25)$ 有共同的焦距.

故选: D.

3. (2023 秋·江苏·高二校联考阶段练习) 设 P 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的点, F_1, F_2 分别是椭圆 C 的左, 右焦点,

$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 5$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】D

【解析】先根据椭圆的方程求得 c , 进而求得 $|F_1F_2|$, 设出 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$, 利用余弦定理可求得 mn 的值, 最后利用三角形面积公式求解.

【详解】由椭圆方程有 $a = 4, b = 3$, 则 $c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

设 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$, 由椭圆的定义有: $m + n = 2a = 8$. 设 $\angle F_1PF_2 = \theta$,

由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 5$, 得 $mn \cos \theta = 5$, 由余弦定理得: $m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta = 28$

解得: $mn = 13, \cos \theta = \frac{5}{13}$, $\therefore \sin \theta = \frac{12}{13}$.

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} mn \sin \theta = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{12}{13} = 6$.

故选: D

题型二: 椭圆的范围问题

4. (2022 秋·江苏淮安·高二江苏省郑梁梅高级中学校联考期中) 设 A_1, A_2 分别为椭圆 $C: y^2 + \frac{x^2}{n} = 1 (0 < n < 1)$ 的上、下

顶点, 若在椭圆 C 上存在点 P , 满足 $\angle A_1PA_2 = 120^\circ$, 则实数 n 的取值范围为 ()

A. $\left(0, \frac{1}{3}\right]$

B. $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{4}, 1\right)$

D. $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$

【答案】A

【分析】求出点 A_1, A_2 的坐标，设点 $P(x_0, y_0)$ ，利用余弦定理建立关系，结合椭圆范围求解作答.【详解】依题意， $A_1(0, 1), A_2(0, -1)$ ，设点 $P(x_0, y_0)$ ， $0 < x_0 \leq \sqrt{n}$ ， $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{n}$ ， $|PA_1| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2}$ ， $|PA_2| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 1)^2}$ ， $|A_1A_2| = 2$ ， $\forall A_1PA_2$ 中，由余弦定理得： $|PA_1|^2 + |PA_2|^2 + |PA_1| \cdot |PA_2| = |A_1A_2|^2$ ，整理得 $2x_0^2 + 2y_0^2 + 2 + \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + 1)^2 - 4y_0^2} = 4$ ，则 $\left[(1 - \frac{1}{n})x_0^2 + 2\right]^2 - 4(1 - \frac{1}{n})^2 x_0^2 = 4(1 - \frac{1}{n})^2 x_0^4$ ，化简得： $3(1 - \frac{1}{n})^2 x_0^2 = 4$ ，即 $(1 - \frac{1}{n})^2 \cdot n \geq \frac{4}{3}$ ，于是得 $n^2 - \frac{10}{3}n + 1 \geq 0$ ，即 $(n - 3)(n - \frac{1}{3}) \geq 0$ ，而 $0 < n < 1$ ，解得 $0 < n \leq \frac{1}{3}$ ，所以实数 n 的取值范围为 $(0, \frac{1}{3}]$.

故选：A

5. (2023·高二课时练习) 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的动点 (点 P 不在坐标轴上)， F_1, F_2 为椭圆的左、右焦点， O 为坐标原点；若 M 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线上的一点，且 $F_1M \perp MP$ ，则 $|OM|$ 的取值范围为 ()

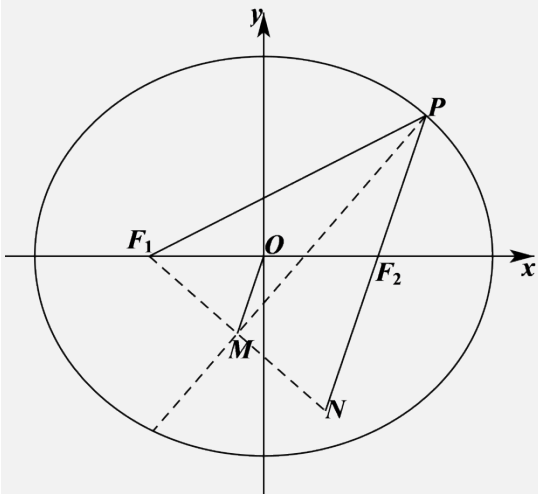
A. $(0, \sqrt{3})$

B. $(0, 2)$

C. $(1, 2)$

D. $(\sqrt{3}, 2)$

【答案】A

【分析】延长 PF_2, F_1M 相交于点 N ，连接 OM ，利用椭圆的定义分析得出 $|OM| = \frac{1}{2}||PF_1| - |PF_2||$ ，设点 $P(x_0, y_0)$ ，求出 x_0 的取值范围，利用椭圆的方程计算得出 $|OM| = \frac{1}{2}|x_0|$ ，由此可得出结果.【详解】如下图，延长 PF_2, F_1M 相交于点 N ，连接 OM ，

因为 $F_1M \perp MP$,

因为 PM 为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 所以, $|PN|=|PF_1|$, 则点 M 为 F_1N 的中点,

因为 O 为 F_1F_2 的中点, 所以, $|OM|=\frac{1}{2}|F_2N|=\frac{1}{2}\|PN|-|PF_2|\|=\frac{1}{2}\|PF_1|-|PF_2|\|$,

设点 $P(x_0, y_0)$, 由已知可得 $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,

则 $-2 < x_0 < 2$ 且 $x_0 \neq 0$, 且有 $y_0^2 = 1 - \frac{1}{4}x_0^2$,

$$|PF_1| = \sqrt{(x_0 + \sqrt{3})^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 + 2\sqrt{3}x_0 + 3 + 1 - \frac{1}{4}x_0^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x_0^2 + 2\sqrt{3}x_0 + 4} = \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + 2 \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + 2,$$

$$\text{故 } |PF_2| = 4 - |PF_1| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0,$$

$$\text{所以, } |OM| = \frac{1}{2}\|PF_1| - |PF_2|\| = \frac{\sqrt{3}}{2}|x_0| \in (0, \sqrt{3}).$$

故选: A.

6. (2023·高二课时练习) 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的任意一点, 过点 P 作圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的切线, 设其中

一个切点为 M , 则 $|PM|$ 的取值范围为 ()

A. $[\sqrt{3}, 4]$

B. $[\sqrt{3}, \sqrt{15}]$

C. $[\sqrt{15}, 4]$

D. $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

【答案】B

【分析】设 $P(x, y)$, 得到 $|PM|^2 = |PC|^2 - |MC|^2 = -\frac{1}{3}(y+3)^2 + 15$, 利用椭圆的范围求解.

【详解】解: 设 $P(x, y)$,

$$\text{则 } |PM|^2 = |PC|^2 - |MC|^2 = x^2 + (y-1)^2 - 1,$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{9}\right) \times 12 + (y-1)^2 - 1,$$

$$= -\frac{1}{3}(y+3)^2 + 15,$$

因为 $-3 \leq y \leq 3$,

$$\text{所以 } 3 \leq |PM|^2 \leq 15, \text{ 即 } \sqrt{3} \leq |PM| \leq \sqrt{15},$$

故选: B

题型三: 椭圆的离心率问题

7. (2023 秋·江苏盐城·高二江苏省射阳中学校) 已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, 若过 F 的直线 l 与圆

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/846151154213010143>