第 2 讲　数列求和及数列的综合应用

感悟高考　明确考向

(2010·山东)已知等差数列$\{a_n\}$满足：$a_3=7$，$a_5+a_7=26$，$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)求 a_n 及 S_n；

(2)令 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解　(1)设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d.

因为 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$，所以$\begin{cases}a_1+2d=7,\\2a_1+10d=26,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=2.\end{cases}$　所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$，

$S_n=3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$.

(2)由(1)知 $a_n=2n+1$,

所以 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}=\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

所以 $T_n=\dfrac{1}{4}\cdot(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=\dfrac{1}{4}\cdot(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{n}{4(n+1)}$,

即数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\dfrac{n}{4(n+1)}$.

考题分析　本题主要考查了等差数列的定义、通项公式以及前 n 项和 S_n 的求法．第(1)问突出考查数列的基本量法和公式法．第(2)问突出考查裂项相消求和法．

易错提醒　(1)不能准确选择基本量，求不出 a_1 和公差 d.

(2) b_n 化简不准确，不能正确将 b_n 进行裂项.

主干知识梳理

1. 等差、等比数列的求和公式

(1)等差数列前 n 项和公式：

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

(2)等比数列前 n 项和公式：

①$q=1$ 时，$S_n=na_1$；

②$q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

2. 数列求和的方法技巧

(1)转化法

有些数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将数列通项拆开或变形，可转化为几个等差、等比数列或常见的数列，即先分别求和，然后再合并.

(2)错位相减法

这是在推导等比数列的前 n 项和公式时所用的方法，这种方法主要用于求数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前 n 项和，其中$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是等差数列和等比数列.

(3)倒序相加法

这是在推导等差数列前 n 项和公式时所用的方法，也就是将一个数列倒过来排列(反序)，当它与原数列相加时若有公式可提，并且剩余项的和易于求得，则这样的数列可用倒序相加法求和.

(4)裂项相消法

利用通项变形，将通项分裂成两项或 n 项的差，通过相加过程中的相互抵消，最后只剩下有限项的和.

3．数列的应用题

(1)应用问题一般文字叙述较长，反映的事物背景陌生，知识涉及面广，因此要解好应用题，首先应当提高阅读理解能力，将普通语言转化为数学语言或数学符号，实际问题转化为数学问题，然后再用数学运算、数学推理予以解决.

(2)数列应用题一般是等比、等差数列问题，其中，等比数列涉及的范围比较广，如经济上涉及利润、成本、效益的增减，解决该类题的关键是建立一个数列模型$\{a_n\}$，利用该数列的通项公式、递推公式或前n项和公式.

热点分类突破

题型一　错位相减法求数列的前 n 项和

例 1　已知当 $x=5$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 取得最小值，等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=f(n)$，$a_2=-7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，且 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求 T_n.

思维启迪　(1)由对称轴得$-\frac{b}{2a}=5$，由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 求 a_n.

(2)用错位相减法求 T_n.

解　(1)由题意得：$-\frac{b}{2a}=5$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$ $=an^2+bn-a(n-1)^2-b(n-1)=2an+b-a=2an-11a$.

$\because a_2=-7$，得 $a=1$. $\therefore a_1=S_1=-9$,

$\therefore a_n=2n-11$.

(2)$b_n=\frac{2n-11}{2^n}$,

$\therefore T_n=\frac{-9}{2}+\frac{-7}{2^2}+\cdots+\frac{2n-11}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{-9}{2^2}+\cdots+\frac{2n-13}{2^n}+\frac{2n-11}{2^{n+1}}$，②

①－②得

$$\frac{1}{2}T_n=-\frac{9}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-11}{2^{n+1}}$$

$$=-\frac{9}{2}+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-11}{2^{n+1}}$$

$$=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-11}{2^{n+1}}.$$

$$\therefore T_n=-7-\frac{2n-7}{2^n}.$$

探究提高 错位相减法求数列的前 n 项和是一类重要方法．在应用这种方法时，一定要抓住数列的特征．即数列的项可以看作是由一个等差数列和一个等比数列对应项相乘所得数列的求和问题．

变式训练 1　(2010·全国)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$，

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令 $b_n=na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

解　(1)由已知，当 $n\geq 1$ 时，$a_{n+1}=[(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)]+a_1=3(2^{2n-1}+2^{2n-3}+\cdots+2)+2=2^{2(n+1)-1}$.

而 $a_1=2$，符合上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{2n-1}$.

(2)由 $b_n=na_n=n\cdot 2^{2n-1}$ 知

$S_n=1\cdot 2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^5+\cdots+n\cdot 2^{2n-1}$，①

从而 $2^2\cdot S_n=1\cdot 2^3+2\cdot 2^5+3\cdot 2^7+\cdots+n\cdot 2^{2n+1}$.②

①－②得$(1-2^2)S_n=2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}-n\cdot 2^{2n+1}$，

即 $S_n=\frac{1}{9}[(3n-1)2^{2n+1}+2]$.

题型二　裂项相消法求数列的前 n 项和

例 2　等差数列$\{a_n\}$各项均为正整数，$a_1=3$，前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$中，$b_1=1$，且 $b_2S_2=64$，$\{b_{a_n}\}$是公比为 64 的等比数列.

(1)求 a_n 与 b_n；

(2)证明：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{3}{4}$.

思维启迪　(1)先设$\{a_n\}$的公差为 d，$\{b_n\}$的公比为 q，用待定系数法即可求出 d 与 q，从而求出 a_n，b_n的通项；

(2)先求出 S_n，然后用裂项相消求和法即可解决.

(1)**解**　设$\{a_n\}$的公差为 d，$\{b_n\}$的公比为 q，则 d 为正整数，$a_n=3+(n-1)d$，$b_n=q^{n-1}$，

依题意有 $\begin{cases} \dfrac{b_{a_{n+1}}}{b_{a_n}}=\dfrac{q^{3+nd-1}}{q^{3+(n-1)d-1}}=q^d=64=2^6, & ① \end{cases}$

由 $q(6+d)=64$ 知 q 为正有理数，又由 $q=2^{\frac{6}{d}}$ 知，d 为 6 的因子 1,2,3,6 之一，解①得 $d=2$，$q=8$，

故 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$，$b_n=8^{n-1}$.

(2)证明　$S_n=3+5+\cdots+(2n+1)=n(n+2)$,

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}$

$$=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

探究提高　(1)待定系数法是高中数学中的重要思想方法，在数列中常常用该法求未知量.

(2)对于 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，其中 $a_n=\dfrac{q}{n(n+p)}$(其中 p、q 为常数)的求和问题，往往用裂项相消法.

变式训练 2　数列$\{a_n\}$的各项均是正数，其前 n 项和为 S_n 且满足$(p-1)S_n=p^2-a_n$，其中 p 为正常数，且 $p\neq 1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{1}{2-\log_p a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_nb_{n+1}\}$的前 n 项和 T_n.

解　(1)当 $n=1$ 时，$(p-1)a_1=p^2-a_1$，

$\therefore a_1=p$.

当 $n\geq 2$ 时，$\because (p-1)S_n=p^2-a_n$，

$\therefore (p-1)S_{n-1}=p^2-a_{n-1}$，

$\therefore (p-1)a_n=a_{n-1}-a_n$，

$\therefore a_n=\dfrac{1}{p}a_{n-1}$.

即$\{a_n\}$是以 p 为首项，$\frac{1}{p}$为公比的等比数列.

$\therefore a_n=p(\frac{1}{p})^{n-1}=p^{2-n}$.

(2)因为 $b_n=\frac{1}{2-\log_p p^{2-n}}=\frac{1}{2-(2-n)}=\frac{1}{n}$.

所以 $b_nb_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

所以 $T_n=b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+\cdots+b_nb_{n+1}$

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

题型三　数列与不等式的综合问题

例 3　已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，点(n, S_n)在函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ 的图象上.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项；

(2)若 $c_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}$，求证：$2n<c_1+c_2+\cdots+c_n<2n+\frac{1}{2}$.

思维启迪　(1)由 S_n 求 a_n 可考虑，$a_n=S_n-S_{n-1}$；

(2)利用不等式放缩、数列求和分析.