

江苏省泰州市泰州中学 2023-2024 学年高三下学期一模考试数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 2020 年是脱贫攻坚决战决胜之年，某市为早日实现目标，现将甲、乙、丙、丁 4 名干部派遣到 A、B、C 三个贫困县扶贫，要求每个贫困县至少分到一人，则甲被派遣到 A 县的分法有（ ）

- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 36 种

2. 已知圆 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线相切，则 p 的值为（ ）

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. 4

3. 已知函数 $f(x) = (\ln ax - 1)(x^2 + ax - 4)$ ，若 $x > 0$ 时， $f(x) \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的值为（ ）

- A. $2e$ B. $4e$ C. $\frac{e}{\sqrt{e-2}}$ D. $\frac{e}{\sqrt{4-e}}$

4. 下列与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 定义域和单调性都相同的函数是（ ）

- A. $y = 2^{\log_2 x}$ B. $y = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C. $y = \log_2 \frac{1}{x}$ D. $y = x^{\frac{1}{4}}$

5. 五行学说是华夏民族创造的哲学思想，是华夏文明重要组成部分.古人认为，天下万物皆由金、木、水、火、土五类元素组成，如图，分别是金、木、水、火、土彼此之间存在的相生相克的关系.若从 5 类元素中任选 2 类元素，则 2 类元素相生的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

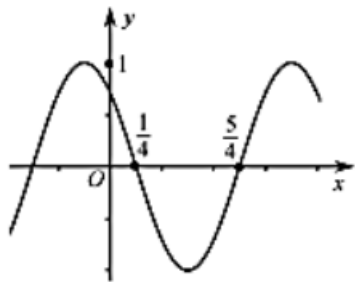
6. 在 $\triangle ABC$ 中， M 是 BC 的中点， $AM = 1$ ，点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$ ，则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于（ ）

- A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

7. 数列 $\{a_n\}$, 满足对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值.若 $a_7=2$, $a_9=3$, $a_{98}=4$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前100项的和 $S_{100}=(\quad)$

- A. 132 B. 299 C. 68 D. 99

8. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\quad)$



- A. $\left[-\frac{5}{4} + k\pi, -\frac{1}{4} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ B. $\left[-\frac{5}{4} + 2k\pi, -\frac{1}{4} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
 C. $\left[-\frac{5}{4} + k, -\frac{1}{4} + k\right], k \in \mathbb{Z}$ D. $\left[-\frac{5}{4} + 2k, -\frac{1}{4} + 2k\right], k \in \mathbb{Z}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$, 方程 $f(x) - a = 0$ 有四个不同的根, 记最大的根的所有取值为集合 D , 则“函

数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有两个零点”是“ $k > \frac{1}{2}$ ”的 $(\quad)$.

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 若 $2^m > 2^n > 1$, 则 $(\quad)$

- A. $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ B. $\pi^{m-n} > 1$
 C. $\ln(m-n) > 0$ D. $\log_{\frac{1}{2}} m > \log_{\frac{1}{2}} n$

11. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 4\sqrt{3}$, $PA = PC = 2\sqrt{5}$, $PA \perp BC$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $(\quad)$

- A. 25π B. 75π C. 80π D. 100π

12. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = a\sqrt{x} + bx^2$ 的函数图像上的任意两点, 且 $y = f(x)$ 在点

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行, 则 $(\quad)$

A. $a=0$, b 为任意非零实数

B. $b=0$, a 为任意非零实数

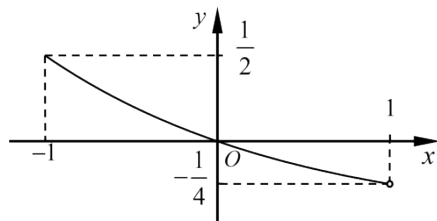
C. a 、 b 均为任意实数

D. 不存在满足条件的实数 a , b

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$ ，其图象如图所示. 函数 $g(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，满足 $g(2-x) + g(x) = 0$ ，

且当 $x \in (0, 1)$ 时， $g(x) = f(x)$. 给出下列三个结论：



① $g(0) = 0$;

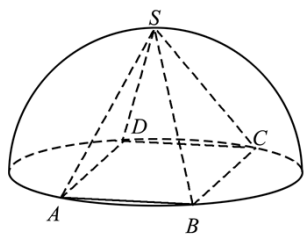
② 函数 $g(x)$ 在 $(-1, 5)$ 内有且仅有 3 个零点;

③ 不等式 $f(-x) < 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 0\}$.

其中，正确结论的序号是_____.

14. 函数 $y = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的值域为_____.

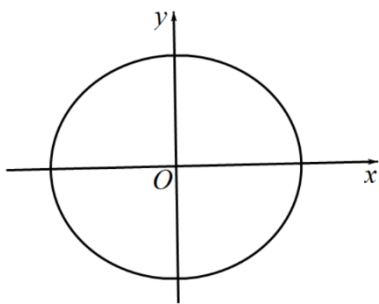
15. 如图，半球内有一内接正四棱锥 $S-ABCD$ ，该四棱锥的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，则该半球的体积为_____.



16. 双曲线 $y^2 - x^2 = 1$ 的焦点坐标是_____，渐近线方程是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且过点 $(0, \sqrt{3})$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知 $\triangle BMN$ 是椭圆 C 的内接三角形,

①若点 B 为椭圆 C 的上顶点, 原点 O 为 $\triangle BMN$ 的垂心, 求线段 MN 的长;

②若原点 O 为 $\triangle BMN$ 的重心, 求原点 O 到直线 MN 距离的最小值.

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = a + \frac{1}{2}t \\ y = \sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, a \in R)$$
. 在以坐标原点为

极点、 x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 C 的极坐标方程为 $3\rho^2 \cos 2\theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 3$.

(1) 若点 $A(2, 0)$ 在直线 l 上, 求直线 l 的极坐标方程;

(2) 已知 $a > 0$, 若点 P 在直线 l 上, 点 Q 在曲线 C 上, 且 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求 a 的值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = 1 + 2x - \frac{2a}{x} - 6a \ln x$ 存在一个极大值点和一个极小值点.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 的极大值点和极小值点分别为 x_1 和 x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) < 2 - 6e$, 求实数 a 的取值范围. (e 是自然对数的底数)

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x \ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2 \ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in R$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值;

(III) 若函数 $F(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$, 当 $a=2$ 时, $F(x)$ 的最大值为 M , 求证: $M < \frac{3}{2}$.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t + 2, \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 在以坐标原点 O 为极

点, x 轴的正半轴为极轴, 且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中, 曲线 C 的极坐标方程是

$$\rho = 4\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right).$$

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A, B , 求线段 AB 的长.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

分成甲单独到 A 县和甲与另一人一同到 A 县两种情况进行分类讨论, 由此求得甲被派遣到 A 县的分法数.

【详解】

如果甲单独到 A 县, 则方法数有 $C_3^2 \times A_2^2 = 6$ 种.

如果甲与另一人一同到 A 县, 则方法数有 $C_3^1 \times A_2^2 = 6$ 种.

故总的方法数有 $6+6=12$ 种.

故选: B

【点睛】

本小题主要考查简答排列组合的计算, 属于基础题.

2、B

【解析】

因为圆 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线相切，则圆心为 $(3,0)$ ，半径为 4，根据相切可知，圆心到直线的距离等于 半径，可知 p 的值为 2，选 B.

【详解】

请在此输入详解！

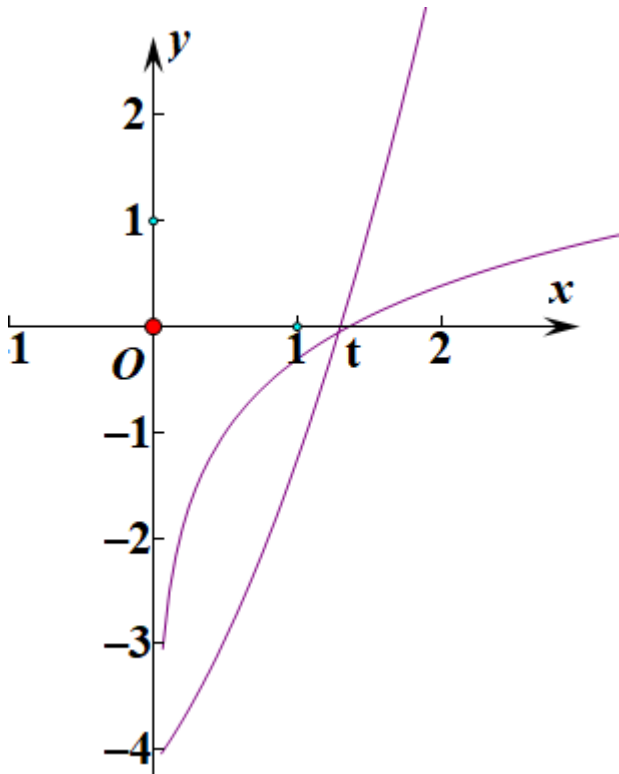
3、 D

【解析】

通过分析函数 $y = \ln ax - 1$ ($x > 0$) 与 $y = x^2 + ax - 4$ ($x > 0$) 的图象，得到两函数必须有相同的零点 t ，解方程组

$$\begin{cases} \ln at - 1 = 0 \\ a^2 + at - 4 = 0 \end{cases} \text{ 即得解.}$$

【详解】



如图所示，函数 $y = \ln ax - 1$ ($x > 0$) 与 $y = x^2 + ax - 4$ ($x > 0$) 的图象，

因为 $x > 0$ 时， $f(x) \geq 0$ 恒成立，

于是两函数必须有相同的零点 t ，

$$\text{所以 } \begin{cases} \ln at - 1 = 0 \\ a^2 + at - 4 = 0 \end{cases}$$

$$at = 4 - t^2 = e,$$

解得 $a = \frac{e}{\sqrt{4-e}}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查函数的图象的综合应用和函数的零点问题，考查不等式的恒成立问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4、C

【解析】

分析函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域和单调性，然后对选项逐一分析函数的定义域、单调性，由此确定正确选项.

【详解】

函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

A 选项， $y = 2^{\log_2 x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，不符合.

B 选项， $y = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的定义域为 R ，不符合.

C 选项， $y = \log_2 \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，符合.

D 选项， $y = x^{\frac{1}{4}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，不符合.

故选：C

【点睛】

本小题主要考查函数的定义域和单调性，属于基础题.

5、A

【解析】

列举出金、木、水、火、土任取两个的所有结果共 10 种，其中 2 类元素相生的结果有 5 种，再根据古典概型概率公式可得结果.

【详解】

金、木、水、火、土任取两类，共有：

金木、金水、金火、金土、木水、木火、木土、水火、水土、火土 10 种结果，

其中两类元素相生的有火木、火土、木水、水金、金土共 5 结果，

所以 2 类元素相生的概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，故选 A.

【点睛】

本题主要考查古典概型概率公式的应用，属于基础题，利用古典概型概率公式求概率时，找准基本事件个数是解题的关键，基本事件的探求方法有 (1)枚举法：适合给定的基本事件个数较少且易一一列举出的；(2)树状图法：适合于较为复杂的问题中的基本事件的探求.在找基本事件个数时，一定要按顺序逐个写出：先 (A_1, B_1) ， $(A_1, B_2) \dots (A_1, B_n)$ ，再 (A_2, B_1) ， $(A_2, B_2) \dots (A_2, B_n)$ 依次 $(A_3, B_1) (A_3, B_2) \dots (A_3, B_n) \dots$ 这样才能避免多写、漏写现象的发生.

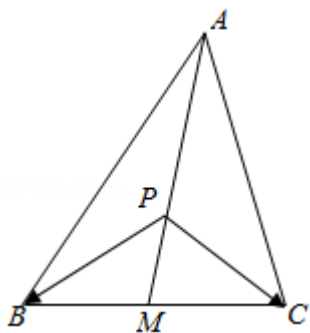
6、B

【解析】

由 M 是 BC 的中点，知 AM 是 BC 边上的中线，又由点 P 在 AM 上且满足 $\vec{AP} = 2\vec{PM}$ 可得 P 是三角形 ABC 的重心，根据重心的性质，即可求解.

【详解】

解：∵ M 是 BC 的中点，知 AM 是 BC 边上的中线，



又由点 P 在 AM 上且满足 $\vec{AP} = 2\vec{PM}$

∴ P 是三角形 ABC 的重心

$$\begin{aligned} \therefore \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) \\ = \vec{PA} \cdot \vec{AP} = -|\vec{PA}|^2 \end{aligned}$$

又∵ $AM=1$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{PA}| &= \frac{2}{3} \\ \therefore \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

故选 B.

【点睛】

判断 P 点是否是三角形的重心有如下几种办法：①定义：三条中线的交点. ②性质： $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$ 或

$|\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 + |\vec{PC}|^2$ 取得最小值③坐标法： P 点坐标是三个顶点坐标的平均数.

7、B

【解析】

由 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值，可得 $a_{n+3} = a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列，求出 a_1, a_2, a_3 ，即求 S_{100} 。

【详解】

对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$ ，均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值，

$$\therefore (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = 0,$$

$$\text{故 } a_{n+3} = a_n,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列，

$$\text{故 } a_1 = a_7 = 2, a_2 = a_8 = 4, a_3 = a_9 = 3,$$

$$\therefore S_{100} = (a_1 + a_2 + a_3) + L + (a_{97} + a_{98} + a_{99}) + a_{100} = 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1$$

$$= 33(2 + 4 + 3) + 2 = 299.$$

故选：B。

【点睛】

本题考查周期数列求和，属于中档题。

8、D

【解析】

由图象可以求出周期，得到 ω ，根据图象过点 $(\frac{3}{4}, -1)$ 可求 φ ，根据正弦型函数的性质求出单调增区间即可。

【详解】

$$\text{由图象知 } \frac{T}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1,$$

$$\text{所以 } T = 2, \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{又图象过点 } (\frac{3}{4}, -1),$$

$$\text{所以 } -1 = \sin(\frac{3\pi}{4} + \varphi),$$

$$\text{故 } \varphi \text{ 可取 } \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(\pi x + \frac{3\pi}{4})$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi x + \frac{3\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

解得 $2k - \frac{5}{4} \leq x \leq 2k - \frac{1}{4}, k \in Z$

所以函数的单调递增区间为 $\left[-\frac{5}{4} + 2k, -\frac{1}{4} + 2k\right], k \in Z$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了三角函数的图象与性质，利用“五点法”求函数解析式，属于中档题.

9、A

【解析】

作出函数 $f(x)$ 的图象，得到 $D = (2, 4]$ ，把函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有零点转化为 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 $(2, 4]$ 上有交点，利用导数求出切线斜率，即可求得 k 的取值范围，再根据充分、必要条件的定义即可判断.

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0 \\ x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象如图，

由图可知， $D = (2, 4]$ ，

函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有 2 个零点，即 $f(x) = kx$ 有两个不同的根，

也就是 $y = kx$ 与 $y = f(x)$ 在 $(2, 4]$ 上有 2 个交点，则 k 的最小值为 $\frac{1}{2}$ ；

设过原点的直线与 $y = \log_2 x$ 的切点为 $(x_0, \log_2 x_0)$ ，斜率为 $\frac{1}{x_0 \ln 2}$ ，

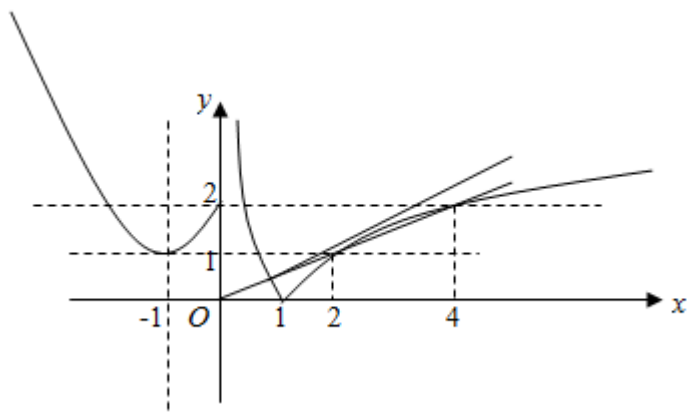
则切线方程为 $y - \log_2 x = \frac{1}{x_0 \ln 2} (x - x_0)$ ，

把 $(0, 0)$ 代入，可得 $-\log_2 x_0 = -\frac{1}{\ln 2}$ ，即 $x_0 = e$ ， $\therefore$ 切线斜率为 $\frac{1}{e \ln 2}$ ，

$\therefore k$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e \ln 2}\right)$ ，

$\therefore$ 函数 $F(x) = f(x) - kx (x \in D)$ 有两个零点”是“ $k > \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件，

故选 A.



【点睛】

本题主要考查了函数零点的判定，考查数学转化思想方法与数形结合的解题思想方法，训练了利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，试题有一定的综合性，属于中档题.

10、B

【解析】

根据指数函数的单调性，结合特殊值进行辨析.

【详解】

若 $2^m > 2^n > 1 = 2^0$ ， $\therefore m > n > 0$ ， $\therefore \pi^{m-n} > \pi^0 = 1$ ，故 B 正确；

而当 $m = \frac{1}{2}$ ， $n = \frac{1}{4}$ 时，检验可得，A、C、D 都不正确，

故选：B.

【点睛】

此题考查根据指数幂的大小关系判断参数的大小，根据参数的大小判定指数幂或对数的大小关系，需要熟练掌握指数函数和对数函数的性质，结合特值法得出选项.

11、D

【解析】

根据底面为等边三角形，取 BC 中点 M ，可证明 $BC \perp$ 平面 PAM ，从而 $BC \perp PM$ ，即可证明三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥. 取底面等边 $\triangle ABC$ 的重心为 O' ，可求得 P 到平面 ABC 的距离，画出几何关系，设球心为 O ，即可由球的性质和勾股定理求得球的半径，进而得球的表面积.

【详解】

设 M 为 BC 中点， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AM \perp BC$ ，

又因为 $PA \perp BC$ ，且 $PA \cap AM = A$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 PAM ，则 $BC \perp PM$ ，

由三线合一性质可知 $PB = PA = PC$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/846224050010010123>