高考专题突破四　高考中的立体几何问题

题型一　多维探究　空间角的求法

命题点1　求线线角

例1　(2019·安徽知名示范高中联合质检)若在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle A_1AC=\angle BAC=60°$，平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC，$AA_1=AC=AB$，则异面直线 AC_1 与 A_1B 所成角的余弦值为________.

答案　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解析　方法一　令 M 为 AC 的中点，连接 MB，MA_1，

由题意知△ABC 是等边三角形，所以 $BM\perp AC$，

同理，$A_1M\perp AC$，

因为平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC，平面 $A_1ACC_1\cap$平面 $ABC=AC$，$BM\subset$平面 ABC，所以 $BM\perp$平面 A_1ACC_1，

因为 $A_1M\subset$平面 A_1ACC_1，所以 $BM\perp A_1M$，

所以 AC，BM，A_1M 两两垂直，以 M 为原点，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MA_1}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AA_1=AC=AB=2$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(-2,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AC_1}=(-3,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1B}\rangle=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

故异面直线 AC_1 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

方法二　如图，在平面 ABC，平面 $A_1B_1C_1$ 中分别取点 D，D_1，连接 BD，CD，B_1D_1，C_1D_1，使得四边形 ABDC，$A_1B_1D_1C_1$ 为平行四边形，连接 DD_1，BD_1，则 $AB=C_1D_1$，且 $AB\parallel C_1D_1$，所以 $AC_1\parallel BD_1$，故 $\angle A_1BD_1$ 或其补角为异面直线 AC_1 与 A_1B 所成的角．连接 A_1D_1，过点 A_1 作 $A_1M\perp AC$ 于点 M，连接 BM，

设 $AA_1=2$，由 $\angle A_1AM=\angle BAC=60°$，得 $AM=1$，$BM=\sqrt{3}$，$A_1M=\sqrt{3}$，

因为平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$A_1M\subset$ 平面 A_1ACC_1，

所以 $A_1M\perp$ 平面 ABC，又 $BM\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1M\perp BM$，所以 $A_1B=\sqrt{6}$，

在菱形 A_1ACC_1 中，可求得 $AC_1=2\sqrt{3}=BD_1$，

同理，在菱形 $A_1B_1D_1C_1$ 中，求得 $A_1D_1=2\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle A_1BD_1=\frac{A_1B^2+BD_1^2-A_1D_1^2}{2A_1B\cdot BD_1}=\frac{6+12-12}{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以异面直线 AC_1 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$．

思维升华　(1)求异面直线所成角的思路：

①选好基底或建立空间直角坐标系．

②求出两直线的方向向量 v_1，v_2．

③代入公式 $|\cos\langle v_1，v_2\rangle|=\frac{|v_1\cdot v_2|}{|v_1||v_2|}$ 求解．

(2)两异面直线所成角的关注点：

两异面直线所成角的范围是 $\theta\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right]$，两向量的夹角 α 的范围是 $[0，\pi]$，当异面直线的方向向量的夹角为锐角或直角时，就是

该异面直线的夹角；当异面直线的方向向量的夹角为钝角时，其补角才是异面直线的夹角.

跟踪训练 1　(2019·龙岩月考)若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为$\sqrt{3}$，AB＝1，则直线 AB_1 与 CD_1 所成的角为(　　)

A．30° B．45° C．60° D．90°

答案　C

解析　∵正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为$\sqrt{3}$，AB＝1，∴$AA_1=\sqrt{3}$，以 D 为原点，DA 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，DD_1 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(1,0,0)$，$B_1(1,1,\sqrt{3})$，$C(0,1,0)$，$D_1(0,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，

设直线 AB_1 与 CD_1 所成的角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{CD_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{CD_1}|}=\dfrac{2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$,

又 $0°<\theta\leqslant 90°$，∴ $\theta=60°$，

∴直线 AB_1 与 CD_1 所成的角为 60°．故选 C.

命题点 2　求线面角

例 2　(2018·浙江)如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$，A_1A，B_1B，C_1C 均垂直于平面 ABC，∠ABC＝120°，$A_1A=4$，$C_1C=1$，$AB=BC=B_1B=2$.

(1)证明：$AB_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$；

(2)求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.

方法一　(1)证明　由 AB＝2，$AA_1=4$，$BB_1=2$，$AA_1\perp AB$，$BB_1\perp AB$，得 $AB_1=A_1B_1=2\sqrt{2}$，

所以$A_1B_1^2+AB_1^2=AA_1^2$，

故$AB_1\perp A_1B_1$.

由$BC=2$，$BB_1=2$，$CC_1=1$，$BB_1\perp BC$，$CC_1\perp BC$，

得$B_1C_1=\sqrt{5}$.

由$AB=BC=2$，$\angle ABC=120°$，得$AC=2\sqrt{3}$.

由$CC_1\perp AC$，得$AC_1=\sqrt{13}$，

所以$AB_1^2+B_1C_1^2=AC_1^2$，

故$AB_1\perp B_1C_1$.

又因为$A_1B_1\cap B_1C_1=B_1$，A_1B_1，$B_1C_1\subset$平面$A_1B_1C_1$，

所以$AB_1\perp$平面$A_1B_1C_1$.

(2)解　如图，过点C_1作$C_1D\perp A_1B_1$，交直线A_1B_1于点D，

连接AD.

由$AB_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，

得平面$A_1B_1C_1\perp$平面ABB_1.

由$C_1D\perp A_1B_1$，平面$A_1B_1C_1\cap$平面$ABB_1=A_1B_1$，$C_1D\subset$平面$A_1B_1C_1$，得$C_1D\perp$平面ABB_1.

所以$\angle C_1AD$即为AC_1与平面ABB_1所成的角.

由$B_1C_1=\sqrt{5}$，$A_1B_1=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=\sqrt{21}$，

得$\cos\angle C_1A_1B_1=\frac{\sqrt{42}}{7}$，$\sin\angle C_1A_1B_1=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

所以$C_1D=\sqrt{3}$，

故$\sin\angle C_1AD=\frac{C_1D}{AC_1}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

因此直线AC_1与平面ABB_1所成的角的正弦值是$\frac{\sqrt{39}}{13}$.

方法二　(1)证明　如图，以 AC 的中点 O 为原点，分别以射线 OB，OC 为 x，y 轴的正半轴，建立空间直角坐标系.

由题意知各点坐标如下：

$A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$A_1(0,-\sqrt{3},4)$，$B_1(1,0,2)$，$C_1(0,\sqrt{3},1)$.

因此$\overrightarrow{AB_1}=(1,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2\sqrt{3},-3)$.

由$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$，得 $AB_1\perp A_1B_1$.

由$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$，得 $AB_1\perp A_1C_1$.

又 $A_1B_1\cap A_1C_1=A_1$，A_1B_1，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

(2)解　设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ.

由(1)可知

$\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$.

设平面 ABB_1 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$　得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ 2z=0,\end{cases}$

可取 $n=(-\sqrt{3},1,0)$.

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot n|}{|\overrightarrow{AC_1}||n|}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

因此直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值是$\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

思维升华　(1)利用向量求直线与平面所成的角有两个思路：①分

别求出斜线和它在平面内的射影直线的方向向量，转化为求两个方向向量的夹角(或其补角)．②通过平面的法向量来求，即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角，取其余角就是斜线和平面所成的角.

(2)若直线 l 与平面 α 的夹角为 θ，直线 l 的方向向量 l 与平面 α 的法向量 n 的夹角为 β，则 $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$ 或 $\theta=\beta-\frac{\pi}{2}$，故有 $\sin\theta=|\cos\beta|=\frac{|l\cdot n|}{|l||n|}$.

跟踪训练 2　如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC，$\angle ABC=90°$，$\angle BAC=30°$，$A_1A=A_1C=AC$，E，F 分别是 AC，A_1B_1 的中点.

(1)证明：$EF\perp BC$；

(2)求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.

方法一　(1)证明　如图，连接 A_1E，因为 $A_1A=A_1C$，E 是 AC 的中点，所以 $A_1E\perp AC$.

又平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC，$A_1E\subset$平面 A_1ACC_1，平面 $A_1ACC_1\cap$平面 ABC $=AC$，所以 $A_1E\perp$平面 ABC，则 $A_1E\perp BC$.

又因为 $A_1F\parallel AB$，$\angle ABC=90°$，故 $BC\perp A_1F$，

又 A_1E，$A_1F\subset$平面 A_1EF，$A_1E\cap A_1F=A_1$，

所以 $BC\perp$平面 A_1EF.

又 $EF\subset$平面 A_1EF，因此 $EF\perp BC$.

(2)解　取 BC 的中点 G，连接 EG，GF，

则 $EGFA_1$ 是平行四边形.

由于 $A_1E\perp$平面 ABC，故 $A_1E\perp EG$，

所以平行四边形 $EGFA_1$ 为矩形.

连接 A_1G 交 EF 于 O，由(1)得 BC⊥平面 $EGFA_1$，则平面 A_1BC⊥平面 $EGFA_1$，

所以 EF 在平面 A_1BC 上的射影在直线 A_1G 上.

则∠EOG 是直线 EF 与平面 A_1BC 所成的角(或其补角).

不妨设 AC=4，则在 Rt△A_1EG 中，$A_1E=2\sqrt{3}$，$EG=\sqrt{3}$.

由于 O 为 A_1G 的中点，故 $EO=OG=\frac{A_1G}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

所以 $\cos\angle EOG=\frac{EO^2+OG^2-EG^2}{2EO\cdot OG}=\frac{3}{5}$.

因此，直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值是$\frac{3}{5}$.

方法二　(1)证明　连接 A_1E，因为 $A_1A=A_1C$，E 是 AC 的中点，

所以 $A_1E\perp AC$.

又平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC，$A_1E\subset$平面 A_1ACC_1，

平面 $A_1ACC_1\cap$平面 ABC=AC，所以 $A_1E\perp$平面 ABC.

如图，以 E 为原点，分别以射线 EC，EA_1 为 y，z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系.

不妨设 AC=4，则 $A_1(0,0,2\sqrt{3})$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$B_1(\sqrt{3},3,2\sqrt{3})$，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\sqrt{3}\right)$，$C(0,2,0)$.

因此，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$.

由$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 得 EF⊥BC.

(2)解　设直线 EF 与平面 A_1BC 所成角为 θ.

由(1)可得$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3}, 1, 0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0, 2, -2\sqrt{3})$.

设平面 A_1BC 的法向量为 $n=(x, y, z)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{A_1C}\cdot n=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ y-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

取 $n=(1, \sqrt{3}, 1)$，

故 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF}, n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot n|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|n|}=\dfrac{4}{5}$.

因此，直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$.

命题点 3　求二面角

例 3　如图，在四棱锥 A－BCDE 中，平面 BCDE⊥平面 ABC，BE⊥EC，BC＝2，AB＝4，∠ABC＝60°.

(1)求证：BE⊥平面 ACE;

(2)若直线 CE 与平面 ABC 所成的角为 45°，求二面角 E－AB－C 的余弦值.

(1)证明　在△ACB 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{1}{2}$,

解得 $AC=2\sqrt{3}$,

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 AC⊥BC.

又因为平面 BCDE⊥平面 ABC，平面 BCDE∩平面 ABC＝BC，AC⊂平面 ABC,

所以 AC⊥平面 BCDE.

又 BE⊂平面 BCDE，所以 AC⊥BE.

又 BE⊥EC，AC，CE⊂平面 ACE，且 AC∩CE＝C,

所以 BE⊥平面 ACE.

(2)解　方法一　因为直线 CE 与平面 ABC 所成的角为 45°，平面 BCDE⊥平面 ABC,

平面 BCDE∩平面 ABC＝BC,

所以∠BCE＝45°，所以△EBC 为等腰直角三角形.

取 BC 的中点 F，连接 EF，过点 F 作 FG⊥AB 于点 G，连接 EG,

则∠EGF 为二面角 E－AB－C 的平面角.

易得 EF＝BF＝1，$FG=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 Rt△EFG 中，由勾股定理，得 $EG=\sqrt{EF^2+FG^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

所以 $\cos\angle EGF=\frac{FG}{EG}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以二面角 E－AB－C 的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

方法二　因为直线 CE 与平面 ABC 所成的角为 45°，平面 BCDE⊥平面 ABC，平面 BCDE∩平面 ABC＝BC,

所以∠BCE＝45°，所以△EBC 为等腰直角三角形.

记 BC 的中点为 O，连接 OE，则 OE⊥平面 ABC,

以 O 为坐标原点，分别以 OB，OE 所在直线为 x 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(-1,2\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$E(0,0,1)$,

所以$\overrightarrow{BA}=(-2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$.

设平面 ABE 的法向量 $m=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot m=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot m=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-2x+2\sqrt{3}y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $m=(\sqrt{3}，1，\sqrt{3})$为平面 ABE 的一个法向量.

易知平面 ABC 的一个法向量为$\overrightarrow{OE}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle m，\overrightarrow{OE}\rangle=\frac{m\cdot\overrightarrow{OE}}{|m|\cdot|\overrightarrow{OE}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

易知二面角 E－AB－C 为锐角，

所以二面角 E－AB－C 的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

思维升华 (1)求二面角最常用的方法就是分别求出二面角的两个半平面所在平面的法向量，然后通过两个平面的法向量的夹角得到二面角的大小，但要注意结合实际图形判断所求角是锐角还是钝角.

(2)利用向量法求二面角的大小的关键是确定平面的法向量，求法向量的方法主要有两种：①求平面的垂线的方向向量. ②利用法向量与平面内两个不共线向量的数量积为零，列方程组求解.

跟踪训练 3 (2020·湖北宜昌一中模拟)如图，在四棱锥 P－ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，AD⊥AB，AB∥DC，AD＝DC＝AP＝2，AB＝1，点 E 为棱 PC 的中点.

(1)证明：BE⊥PD;

(2)若 F 为棱 PC 上一点，满足 BF⊥AC，求二面角 F－AB－D 的余弦值.

解 依题意，以点 A 为原点，以 AB，AD，AP 为轴建立空间直角坐标系如图，

可得 $B(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$.

由 E 为棱 PC 的中点，得 $E(1,1,1)$.

(1)证明　向量$\overrightarrow{BE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，

故$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，所以$\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{PD}$，所以 $BE\perp PD$.

(2)解　$\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，

由点 F 在棱 PC 上，设$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

故$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$，

由 $BF\perp AC$，得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

因此，$2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$，$\lambda=\frac{3}{4}$，

即$\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设 $n_1=(x,y,z)$为平面 FAB 的法向量，则$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即

$$\begin{cases}x=0,\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$$

不妨令 $z=-1$，可得 $n_1=(0,3,-1)$为平面 FAB 的一个法向量，

取平面 ABD 的法向量 $n_2=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{-1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又因为二面角 F－AB－D 为锐二面角，

所以二面角 F－AB－D 的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

题型二 师生共研 立体几何中的探索性问题

例 4 (2019·淄博模拟)已知正方形的边长为 4，E，F 分别为 AD，BC 的中点，以 EF 为棱将正方形 ABCD 折成如图所示的 60° 的二面角，点 M 在线段 AB 上.

(1)若 M 为 AB 的中点，且直线 MF 与由 A，D，E 三点所确定平面的交点为 O，试确定点 O 的位置，并证明直线 OD∥平面 EMC；

(2)是否存在点 M，使得直线 DE 与平面 EMC 所成的角为 60°；若存在，求此时二面角 M－EC－F 的余弦值，若不存在，说明理由.

解 (1)因为直线 MF⊂平面 ABFE，

故点 O 在平面 ABFE 内也在平面 ADE 内，所以点 O 在平面 ABFE 与平面 ADE 的交线上(如图所示)，

因为 AO∥BF，M 为 AB 的中点，所以△OAM≌△FBM，

所以 OM＝MF，AO＝BF，所以点 O 在 EA 的延长线上，且 AO＝2，

连接 DF 交 EC 于 N，因为四边形 CDEF 为矩形，所以 N 是 EC 的中点，

连接 MN，因为 MN 为△DOF 的中位线，所以 MN∥OD，

又因为 MN⊂平面 EMC，OD⊄平面 EMC，

所以直线 OD∥平面 EMC.

(2)由已知可得，EF⊥AE，EF⊥DE，AE∩DE＝E，

所以 EF⊥平面 ADE，

所以平面 ABFE⊥平面 ADE，

取 AE 的中点 H 为坐标原点，以 AH，DH 所在直线分别为 x 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，