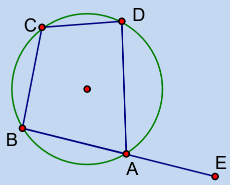
专题 27.5　圆内接四边形【六大题型】

【华东师大版】

题型先知

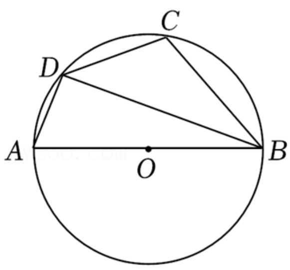
举一反三

【知识点 1　圆内接四边形】

圆的内接四边形对角互补		∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形 ∴ $\angle B+\angle D=180°$ $\angle BAD+\angle C=180°$ $\angle C=\angle DAE$

【题型 1　利用圆内接四边形的性质求角度】

【例 1】（2022•自贡）如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，AB 是⊙O 的直径，$\angle ABD=20°$，则$\angle BCD$ 的度数是（　　）



A．90°　　B．100°　　C．110°　　D．120°

【分析】方法一：根据圆周角定理可以得到$\angle AOD$ 的度数，再根据三角形内角和可以求得$\angle OAD$ 的度数，然后根据圆内接四边形对角互补，即可得到$\angle BCD$ 的度数．

方法二：根据 AB 是⊙O 的直径，可以得到$\angle ADB=90°$，再根据$\angle ABD=20°$ 和三角形内角和，可以得

到$\angle A$的度数，然后根据圆内接四边形对角互补，即可得到$\angle BCD$的度数．

【解答】解：方法一：连接OD，如图所示，

∵$\angle ABD=20^\circ$，

∴$\angle AOD=40^\circ$，

∵$OA=OD$，

∴$\angle OAD=\angle ODA$，

∵$\angle OAD+\angle ODA+\angle AOD=180^\circ$，

∴$\angle OAD=\angle ODA=70^\circ$，

∵四边形$ABCD$是圆内接四边形，

∴$\angle OAD+\angle BCD=180^\circ$，

∴$\angle BCD=110^\circ$，

故选：C．

方法二：∵AB是⊙O的直径，

∴$\angle ADB=90^\circ$，

∵$\angle ABD=20^\circ$，

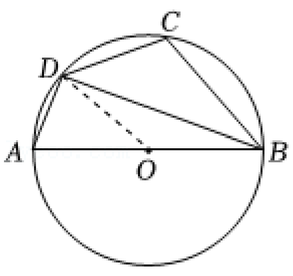
∴$\angle A=70^\circ$，

∵四边形$ABCD$是圆内接四边形，

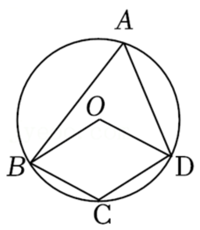
∴$\angle A+\angle BCD=180^\circ$，

∴$\angle BCD=110^\circ$，

故选：C．



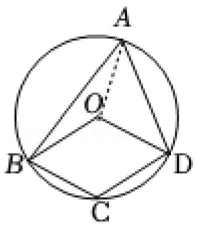
【变式 1-1】（2022•云州区一模）如图，四边形$ABCD$内接于⊙O，连接OB，OD．当四边形$OBCD$是菱形时，则$\angle OBA+\angle ODA$的度数是（　　）



A．65°　　B．60°　　C．55°　　D．50°

【分析】连接 OA，根据等腰三角形的性质求出$\angle OBA=\angle BAO$，$\angle ODA=\angle DAO$，求出$\angle OBA+\angle ODA=\angle BAD$，根据菱形的性质得出$\angle BCD=\angle BOD$，根据圆周角定理得出$\angle BOD=2\angle BAD$，求出$\angle BCD=2\angle BAD$，根号圆内接四边形的性质得出$\angle BAD+\angle BCD=180°$，求出$\angle BAD$，再求出答案即可．

【解答】解：连接 OA，



∵$OA=OB$，$OA=OD$，

∴$\angle OBA=\angle BAO$，$\angle ODA=\angle DAO$，

∴$\angle OBA+\angle ODA=\angle BAO+\angle DAO=\angle BAD$，

∵四边形 $OBCD$ 是菱形，

∴$\angle BCD=\angle BOD$，

由圆周角定理得：$\angle BOD=2\angle BAD$，

∴$\angle BCD=2\angle BAD$，

∵四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴$\angle BAD+\angle BCD=180°$，

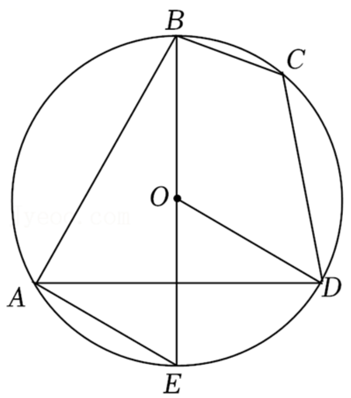
∴$3\angle BAD=180°$，

∴$\angle BAD=60°$，

∴$\angle OBA+\angle ODA=\angle BAD=60°$，

故选：B．

【变式 1-2】（2022•蜀山区校级三模）如图，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，BE 是⊙O 的直径，连接 AE．若$\angle BCD=2\angle BAD$，若连接 OD，则$\angle DOE$ 的度数是 __60°__．



【分析】根据圆内接四边形的性质得出$\angle BCD+\angle BAD=180°$，根据$\angle BCD=2\angle BAD$求出$\angle BAD=60°$，根据圆周角定理求出$\angle BAE=90°$，求出$\angle DAE$的度数，再根据圆周角定理得出$\angle DOE=2\angle DAE$即可．

【解答】解：∵四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形，

∴$\angle BCD+\angle BAD=180°$，

∵$\angle BCD=2\angle BAD$，

∴$\angle BAD=60°$，

∵BE是⊙O的直径，

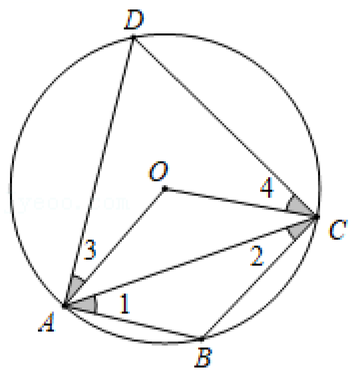
∴$\angle BAE=90°$，

∴$\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=90°-60°=30°$，

∴$\angle DOE=2\angle DAE=60°$，

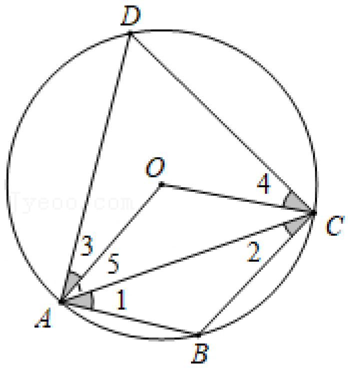
故答案为：60°．

【变式 1-3】（2022 秋•包河区期末）如图，四边形$ABCD$内接于⊙O，$\angle 1+\angle 2=64°$，$\angle 3+\angle 4=$__64__°．



【分析】利用圆内接四边形的性质，得出$\angle DAC+\angle DCB=180°$，$\angle B+\angle D=180°$，推出$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+2\angle 5=180°$，再利用圆周角定理和三角形的内角和定理求出$\angle 3+\angle 4$的度数．

【解答】解：如图，



∵四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，

∴$\angle DAB+\angle DCB=180°$，$\angle B+\angle D=180°$，

又∵$\triangle AOC$ 为等腰三角形，

∴$\angle 5=\angle OCA$，

∴$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+2\angle 5=180°$，

∵$\angle 1+\angle 2=64°$，

∴$\angle 3+\angle 4=180°-64°-2\angle 5=116°-2\angle 5$，

∵$\angle 1+\angle 2+\angle B=180°$，$\angle B+\angle D=180°$，

∴$\angle D=\angle 1+\angle 2=64°$，

∴$\angle O=2\angle D=128$，

在等腰三角形 AOC 中，

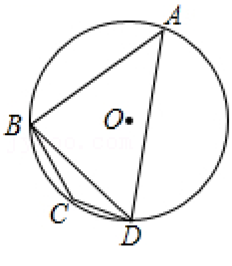
$2\angle 5=180°-\angle O=180°-128°=52°$，

∴$\angle 3+\angle 4=116°-52°=64°$，

故答案为 64．

【题型 2　利用圆内接四边形的性质求线段长度】

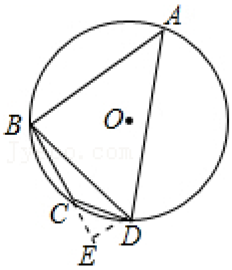
【例 2】（2022•碑林区校级四模）如图所示，四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，$\angle A=45°$，$BC=4$，$CD=2\sqrt{2}$，则弦 BD 的长为（　　）



A．$2\sqrt{5}$　　　B．$3\sqrt{5}$　　　C．$\sqrt{10}$　　　D．$2\sqrt{10}$

【分析】如图，过点 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 的延长线于 E．解直角三角形求出 CE，ED，再利用勾股定理求出 BD 即可．

【解答】解：如图，过点 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 的延长线于 E．



$\because \angle A+\angle BCD=180^\circ$，$\angle A=45^\circ$，

$\therefore \angle BCD=135^\circ$，

$\therefore \angle DCE=45^\circ$，

$\because \angle E=90^\circ$，$CD=2\sqrt{2}$，

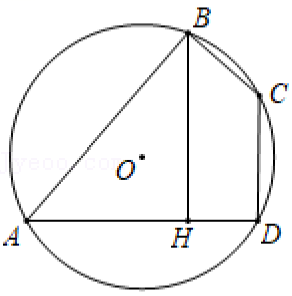
$\therefore CE=ED=2$，$BE=CE+BC=6$，

在 Rt$\triangle BED$ 中，$\because \angle E=90^\circ$，$BE=6$，$DE=2$，

$\therefore BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，

故选：D．

【变式 2-1】（2022•延边州二模）如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，过 B 点作 $BH\perp AD$ 于点 H，若 $\angle BCD=135^\circ$，$AB=4$，则 BH 的长度为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　　B．$2\sqrt{2}$　　　C．$3\sqrt{2}$　　　D．不能确定

【分析】首先根据圆内接四边形的性质求得 $\angle A$ 的度数，然后根据斜边长求得等腰直角三角形的直角边长即可．

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，$\angle BCD=135^\circ$，

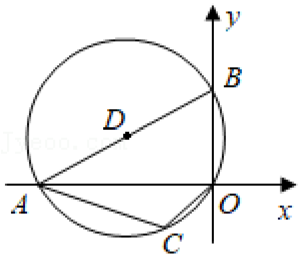
$\therefore \angle A=180^\circ-145^\circ=45^\circ$，

$\because BH\perp AD$，$AB=4$，

$\therefore BH=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

故选：B．

【变式 2-2】（2022•宁津县模拟）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴负半轴上，点 B 在 y 轴正半轴上，⊙D 经过 A，B，O，C 四点，$\angle ACO=120°$，$AB=4$，则圆心点 D 的坐标是（　　）



A．$(\sqrt{3}, 1)$　　　B．$(-\sqrt{3}, 1)$　　　C．$(-1, \sqrt{3})$　　　D．$(-2, 2\sqrt{3})$

【分析】先利用圆内接四边形的性质得到$\angle ABO=60°$，再根据圆周角定理得到 AB 为⊙D 的直径，则 D 点为 AB 的中点，接着利用含 30 度的直角三角形三边的关系得到 $OB=2$，$OA=2\sqrt{3}$，所以 A（$-2\sqrt{3}$，0），B（0，2），然后利用线段的中点坐标公式得到 D 点坐标．

【解答】解：∵四边形 $ABOC$ 为圆的内接四边形，

$\therefore \angle ABO+\angle ACO=180°$，

$\therefore \angle ABO=180°-120°=60°$，

$\because \angle AOB=90°$，

$\therefore AB$ 为⊙D 的直径，

$\therefore D$ 点为 AB 的中点，

在 Rt△ABO 中，$\angle ABO=60°$，

$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=2$，

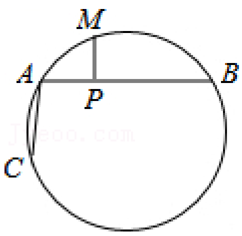
$\therefore OA=\sqrt{3}OB=2\sqrt{3}$

$\therefore A$（$-2\sqrt{3}$，0），B（0，2），

$\therefore D$ 点坐标为（$-\sqrt{3}$，1）．

故选：B．

【变式 2-3】（2022 秋•汉川市期中）已知 M 是弧 CAB 的中点，MP 垂直于弦 AB 于 P，若弦 AC 的长度为 x，线段 AP 的长度是 $x+1$，那么线段 PB 的长度是 <u>　2x+1　</u>．（用含有 x 的代数式表示）



【分析】延长 MP 交圆于点 D，连接 DC 并延长交 BA 的延长线于 E 点，连接 BD，由 M 是弧 CAB 的中点，可得$\angle BDM=\angle CDM$，又因为 MP 垂直于弦 AB 于 P，可得$\angle BPD=\angle EPD=90°$，然后由 ASA 定理可证$\triangle DPE\cong\triangle DPB$，然后由全等三角形的对应角相等，对应边相等可得：$\angle B=\angle E$，$PB=EP$，然后由圆内接四边形的性质可得：$\angle ECA=\angle B$，进而可得：$\angle E=\angle ECA$，然后根据等角对等边可得 $AE=AC$，进而可得 $PB=PE=EA+AP=AC+AP$，然后将 $AC=x$，$AP=x+1$，代入即可得到 PB 的长．

【解答】解：延长 MP 交圆于点 D，连接 DC 并延长交 BA 的延长线于 E 点，连接 BD，

∵M 是弧 CAB 的中点，

∴$\angle BDM=\angle CDM$，

∵MP 垂直于弦 AB 于 P，

∴$\angle BPD=\angle EPD=90°$，

在$\triangle DPE$ 和$\triangle DPB$ 中，

∵$\begin{cases}\angle BPD=\angle EPD\\PD=PD\\\angle BDP=\angle EDP\end{cases}$，

∴$\triangle DPE\cong\triangle DPB$（$ASA$），

∴$\angle B=\angle E$，$PB=EP$，

∵四边形 $ABDC$ 是圆内接四边形，

∴$\angle ECA=\angle B$，

∴$\angle E=\angle ECA$，

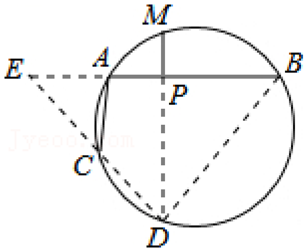
∴$AE=AC$，

∴$PB=PE=EA+AP=AC+AP$，

∵$AC=x$，$AP=x+1$，

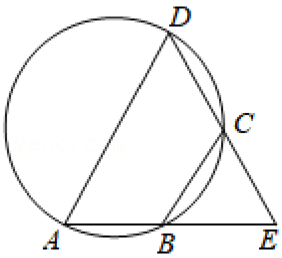
∴$PB=2x+1$．

故答案为：$2x+1$．



【题型 3　利用圆内接四边形的性质求面积】

【例 3】（2022•贺州模拟）如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，$\angle ABC$：$\angle ADC$＝2：1，AB＝2，点 C 为$\widehat{BD}$的中点，延长 AB、DC 交于点 E，且$\angle E$＝60°，则⊙O 的面积是（　　）



A．π　　B．2π　　C．3π　　D．4π

【分析】连接 AC，根据圆内接四边形的性质得到$\angle ABC$＝120°，$\angle ADC$＝60°，进而得出△ADE 为等边三角形，证明 AB＝BE，进而求出圆的半径，根据圆的面积公式计算，得到答案．

【解答】解：连接 AC，

∵四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，

∴$\angle ABC+\angle ADC$＝180°，

∵$\angle ABC$：$\angle ADC$＝2：1，

∴$\angle ABC$＝120°，$\angle ADC$＝60°，

∵$\angle E$＝60°，

∴△ADE 为等边三角形，△BCE 为等边三角形，

∴AD＝AE，BC＝BE，$BC\parallel AD$，

∵点 C 为$\widehat{BD}$的中点，

∴$\angle DAC$＝$\angle BAC$，

∴$AC\perp DE$，

∴AD 为⊙O 的直径，

∵$BC\parallel AD$，

∴$\angle DAC$＝$\angle ACB$，

∴$\angle CAB=\angle ACB$，

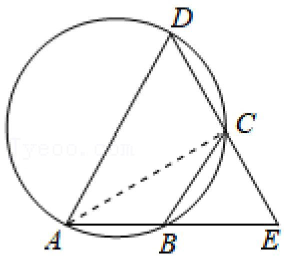
∴$AB=BC$，

∴$AB=BE$，

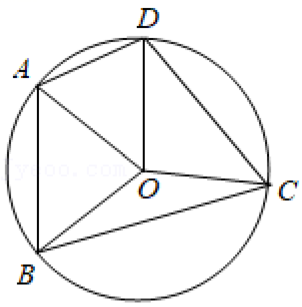
∴⊙O 的半径为 2，

∴⊙O 的面积＝4π，

故选：D.



【变式 3-1】（2022 秋•青山区期中）如图，四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，$\angle AOD+\angle BOC=180°$．若 $AD=2$，$BC=6$，则△BOC 的面积为（　　）



A．3　　B．6　　C．9　　D．12

【分析】延长 BO 交⊙O 于 E，连接 CE，可得$\angle COE+\angle BOC=180°$，$\angle BCE=90°$，由$\angle AOD+\angle BOC=180°$，$\angle AOD=\angle COE$，推出 $AD=CE=2$，根据三角形的面积公式可求得△BEC 的面积为 6，由 $OB=OE$，可得△BOC 的面积＝$\frac{1}{2}$△BEC 的面积．

【解答】解：延长 BO 交⊙O 于 E，连接 CE，

则$\angle COE+\angle BOC=180°$，$\angle BCE=90°$，

即 $CE\perp BC$，

∵$\angle AOD+\angle BOC=180°$，

∴$\angle AOD=\angle COE$，

∴$\widehat{AD}=\widehat{CE}$，

∴$AD=CE=2$，

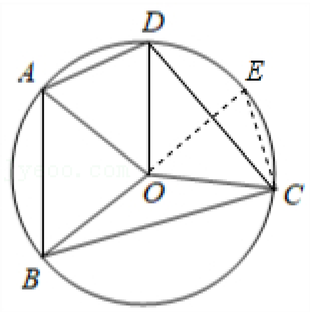
∵$BC=6$，

∴△BEC 的面积为$\frac{1}{2}BC\bullet CE=\frac{1}{2}\times6\times2=6$，

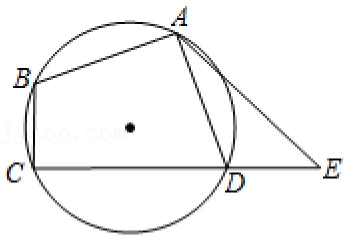
∵$OB=OE$，

∴△BOC 的面积$=\frac{1}{2}$△BEC 的面积$=\frac{1}{2}\times6=3$，

故选：A．

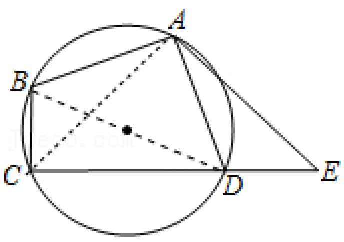


【变式 3-2】（2022•鹿城区模拟）如图，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$AB=AD$，点 E 在 CD 的延长线上，且 $DE=BC$，连接 AE，若 $AE=4$，则四边形 $ABCD$ 的面积为__8__．



【分析】如图，连接 AC，BD．由△ABC≌△ADE（SAS），推出$\angle BAC=\angle DAE$，$AC=AE=4$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$，推出 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACE}$，由此即可解决问题；

【解答】解：如图，连接 AC，BD．



∵$\angle BCD=90°$，

∴BD 是⊙O 的直径，

∴$\angle BAD=90°$，

∵$\angle ADE+\angle ADC=180°$，$\angle ABC+\angle ADC=180°$，

∴$\angle ABC=\angle ADE$，