

2024-2025 学年陕西省西安市碑林区高二上学期第一次月考数学

检测试题（一）

一、单选题（本大题共 8 小题）

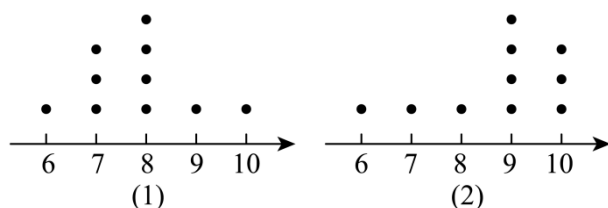
1. 已知 $A = \{x | y = \log_2(3x-1)\}$, $B = \{y | x^2 + y^2 = 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left[-2, \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, 2\right]$ D. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

2. 若复数 z 满足 $z = \frac{1-i}{3-i}$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

3. 某次投篮比赛中, 甲、乙两校都派出了 10 名运动员参加比赛, 甲校运动员的得分分别为 8, 6, 7, 7, 8, 10, 9, 8, 7, 8, 这些成绩可用下图中的 (1) 所示, 乙校运动员的得分可用下图中的 (2) 所示.



则以下结论中, 正确的是 ()

- A. 甲校运动员得分的中位数为 7.5
B. 乙校运动员得分的 75% 分位数为 10
C. 甲校运动员得分的平均数大于 8
D. 甲校运动员得分的标准差大于乙校运动员得分的标准差

4. 已知 $\vec{n}_1 = (-1, 9, 1)$, $\vec{n}_2 = (m, -3, 2)$, $\vec{n}_3 = (0, 2, 1)$, 若 $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ 不能构成空间的一个基底, 则 $m =$ ()

- A. 3 B. 1 C. 5 D. 7

5. 已知直线 $l_1: 2x + (1-a)y + 4 = 0$, $l_2: ax - 3y - 4 = 0$, 则“ $a = 3$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 设直线 l 的方程为 $y - x \cos \theta + 3 = 0 (\theta \in \mathbf{R})$, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()

- A. $[0, \pi)$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
C. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

7. 方程 $|x|-1=\sqrt{1-(y-1)^2}$ 表示的曲线是 ()

- A. 两个圆
- B. 一个圆和一条直线
- C. 一个半圆
- D. 两个半圆

8. 如果直线 $ax+by=7$ $a>0$ $b>0$ 和函数 $f(x)=1+\log_m x$ $m>0$ $m\neq 1$ 的图象恒过同一个定点, 且该定点始终落在圆 $(x+b-1)^2+(y+a-1)^2=25$ 的内部或圆上, 那么 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$
 B. $\left(0, \frac{3}{4}\right]$
 C. $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$
 D. $\left(0, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

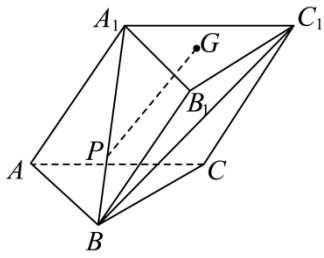
二、多选题（本大题共 3 小题）

9. 下列说法中, 正确的有 ()

- A. 直线 $x+y+1=0$ 在 y 轴上的截距是 1
- B. 当 m 变化时, 圆 $x^2+y^2+(m+2)x+y-2=0$ 恒过定点有且只有一个
- C. 过 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 两点 $x_1 \neq x_2$ $y_1 \neq y_2$ 的所有直线的方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
- D. 直线 $2x-y+3=0$ 关于点 $(3,2)$ 对称的直线方程是 $2x-y-11=0$

10. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 为等边三角形, G 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $AB=2$, 点 P 是 AB 边上的一个动点, 过点 P 作 $PD \perp AC$ 于点 D , 作 $PE \perp BC$ 于点 E , 则 $PD+PE$ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 中, 若 $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \frac{\pi}{3}$, $AB = AA_1 = 1$, 则 ()



A. $\vec{PG} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AA_1}$

B. $\vec{AA_1} \perp \vec{BC}$

C. $\vec{PG} \parallel \vec{BC_1}$

D. $|\vec{PG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$

11. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, P 为直线 $2x + y + 2 = 0$ 上一动点, 过 P 作圆 M 的两条切线, 切点分别为 A 、 B , 则下列说法中正确的是 ()

A. $|PM|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$

B. 直线 AB 恒过定点 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$

C. $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的最小值为 $8\sqrt{2} - 12$

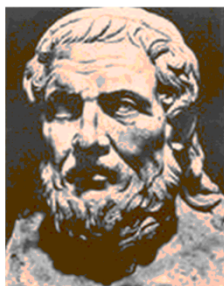
D. $|AB|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

三、填空题 (本大题共 3 小题)

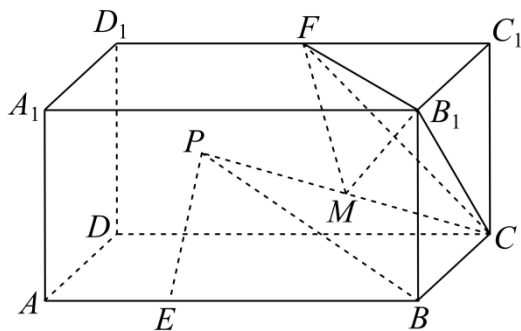
12. 经过点 $M(1, 2)$ 且与直线 $2x - y + 8 = 0$ 垂直的直线方程为_____.

13. 已知点 $(4a, 2b)$ $a > 0$ $b > 0$ 在圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 和圆 $M: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的公共弦上, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为_____.

14. 古希腊数学家阿波罗尼奥斯发现: 平面上到两定点 A , B 距离之比为常数 λ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$) 的点的轨迹是一个圆心在直线 AB 上的圆, 该圆简称为阿氏圆. 根据以上信息, 解决下面的问题: 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2AD = 2AA_1 = 6$, 点 E 在棱 AB 上, $BE = 2AE$, 动点 P 满足 $BP = \sqrt{3}PE$. 若点 P 在平面 $ABCD$ 内运动, 则点 P 所形成的阿氏圆的半径为_____; 若点 P 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内部运动, F 为棱 C_1D_1 的中点, M 为 CP 的中点, 则三棱锥 $M - B_1CF$ 的体积的最小值为_____.



阿波罗尼奥斯



四、解答题（本大题共 5 小题）

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos x$,

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = 2$, $a = \sqrt{7}$, $b + c = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

16. 已知圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 两点 $A(-3, 0)$ 、 $B(-5, 0)$

(1) 若 $r = 6$, 直线 l 过点 B 且被圆 C 所截的弦长为 6, 求直线 l 的方程;

(2) 动点 $P(x, y)$ 满足 $|PA|^2 + |PB|^2 = 10$, 若 P 的轨迹与圆 C 有公共点, 求半径 r 的取值范围.

17. 甲、乙、丙三人结伴去游乐园玩射击游戏, 其中甲射击一次击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$, 甲、乙两人各射击一次且都击中目标的概率为 $\frac{1}{6}$, 乙、丙两人各射击一次且都击中目标的概率为 $\frac{1}{9}$, 且任意两次射击互不影响.

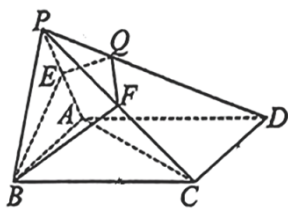
(1) 分别计算乙, 丙两人各射击一次击中目标的概率;

(2) 求甲、乙、丙各射击一次恰有一人击中目标的概率;

(3) 若想击中目标的概率不低于 $\frac{99}{100}$, 甲至少需要射击多少次? (参考数据:

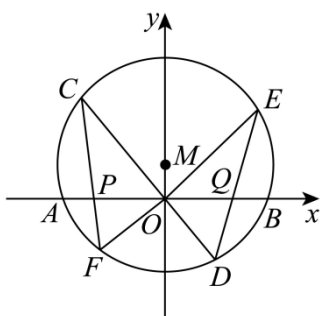
$\lg 2 \approx 0.3010$)

18. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, 侧面 PAB 是等边三角形, $BC = 2AB = 4$, $AB \perp AC$, $PB \perp AC$.



- (1) 证明：平面 $ABCD \perp$ 平面 PAB ，并求 PD 与平面 PAB 所成角的大小；
- (2) 设 Q 为侧棱 PD 上一点，四边形 $BEQF$ 是过 B, Q 两点的截面，且 $AC \parallel$ 平面 $BEQF$ ，是否存在点 Q ，使得平面 $BEQF$ 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{35}$ ？若存在，求 $\frac{DQ}{DP}$ 的值；若不存在，说明理由。

19. 蝴蝶定理因其美妙的构图，像是一只翩翩起舞的蝴蝶，一代代数学名家蜂拥而证，正所谓花若芬芳蜂蝶自来。如图，已知圆 M 的方程为 $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，直线 $x=my$ 与圆 M 交于 $C(x_1, y_1)$ ， $D(x_2, y_2)$ ，直线 $x=ny$ 与圆 M 交于 $E(x_3, y_3)$ ， $F(x_4, y_4)$ 。原点 O 在圆 M 内。设 CF 交 x 轴于点 P ， ED 交 x 轴于点 Q 。



- (1) 当 $b=0$ ， $r=\sqrt{5}$ ， $m=-\frac{1}{2}$ ， $n=2$ 时，分别求线段 OP 和 OQ 的长度；
- (2) ① 求证： $\frac{y_1+y_2}{y_1y_2} = \frac{y_3+y_4}{y_3y_4}$ 。
- ② 猜想 $|OP|$ 和 $|OQ|$ 的大小关系，并证明。

答案

1. 【正确答案】C

先求出集合 A, B ，再根据集合间的运算即可求出 $A \cap B$ 。

【详解】解：由 $y = \log_2(3x-1)$ 知： $3x-1 > 0$ ，

解得： $x > \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore A = \left\{ x \mid x > \frac{1}{3} \right\},$$

由 $x^2 + y^2 = 4$ 知： $-2 \leq y \leq 2$ ，

$$\therefore B = \{ y \mid -2 \leq y \leq 2 \},$$

$$\therefore A \cap B = \left(\frac{1}{3}, 2 \right].$$

故选：C.

2. 【正确答案】D

【详解】由题知， $z = \frac{(3+i)(1-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{4-2i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ ，所以 $|z| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

故选：D.

3. 【正确答案】B

【详解】甲校派出的 10 名运动员参赛成绩从小到大为：6，7，7，7，8，8，8，8，9，10，

其中位数为：8，平均数为： $\frac{6+7 \times 3+8 \times 4+9+10}{10} = 7.8$ ，故选项 A、C 错误；

其标准差为： $\sqrt{\frac{1}{10}[(6-7.8)^2 + 3 \times (7-7.8)^2 + 4 \times (8-7.8)^2 + (9-7.8)^2 + (10-7.8)^2]} = \sqrt{1.16}$ ；

乙校派出的 10 名运动员参赛成绩分别为：6，7，8，9，9，9，9，10，10，10，

则其平均数为： $\frac{6+7+8+9 \times 4+10 \times 3}{10} = 8.7$ ，75%分位数为：10，

标准差为： $\sqrt{\frac{1}{10}[(6-8.7)^2 + (7-8.7)^2 + (8-8.7)^2 + 4 \times (9-8.7)^2 + 3 \times (10-8.7)^2]} = \sqrt{1.61}$

所以甲校运动员得分的标准差小于乙校运动员得分的标准差，故选项 B 正确，D 错误。

故选：B

4. 【正确答案】B

【详解】若 $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ 不能构成空间的一个基底，

$\therefore \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 共面，

$\therefore$ 存在 λ, μ ，使 $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ ，

$$\text{即} \begin{cases} -1 = \lambda + 0 \\ 9 = -3\lambda + 2\mu \\ 1 = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 3 \\ m = 1 \end{cases},$$

故选.B

5. 【正确答案】C

【详解】解：当 $a=3$ 时，直线 $l_1: x-y+2=0$ ， $l_2: 3x-3y-4=0$ ，则 $l_1 \parallel l_2$ ，

$$\text{当 } l_1 \parallel l_2 \text{ 时，} \begin{cases} 2 \times (-3) - (1-a) \times a = 0 \\ 2 \times (-4) - 4a \neq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a^2 - a - 6 = 0 \\ a + 2 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $a=3$ ，

故“ $a=3$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的充要条件，

故选：C

6. 【正确答案】C

【详解】直线 l 的方程可化为 $y = x \cos \theta - 3$ ，所以， $\tan \alpha = \cos \theta \in [-1, 1]$ ，

因为 $0 \leq \alpha < \pi$ ，因此，直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 。

故选：C.

7. 【正确答案】D

【详解】方程可化为 $(|x|-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，

因为 $|x|-1 \geq 0$ ，

所以 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$ ，

若 $x \leq -1$ 时，则方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ，是以 $(-1, 1)$ 为圆心，以 1 为半径的左半圆；

若 $x \geq 1$ 时, 则方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 是以 $(1,1)$ 为圆心, 以 1 为半径的右半圆;

总之, 方程表示的曲线是以 $(1,1)$ 为圆心, 以 1 为半径的右半圆与以 $(-1,1)$ 为圆心, 以 1 为半径的左半圆合起来的图形.

故选: D

8. 【正确答案】A

【详解】根据指数函数的性质, 可得函数 $f(x) = 1 + \log_m x, (m > 0, m \neq 1)$, 恒过定点 $(1,1)$.

将点 $(1,1)$ 代入 $ax + by = 7$, 可得 $a + b = 7$.

由于 $(1,1)$ 始终落在所给圆的内部或圆上, 所以 $a^2 + b^2 \leq 25$.

又由 $\begin{cases} a+b=7, \\ a^2+b^2=25, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$,

所以点 (a,b) 在以 $(3,4)$ 和 $(4,3)$ 为端点的线段上运动,

当取点 $(3,4)$ 时, $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 取点 $(4,3)$ 时, $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$,

所以 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

9. 【正确答案】CD

【详解】对 A: 直线 $x + y + 1 = 0$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = -1$, 所以直线在 y 轴上的截距为 -1 , 故 A 错误;

对 B: 令 $x = 0$ 得: $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2$ 或 $y = 1$, 所以当 m 变化时, 圆

$x^2 + y^2 + (m+2)x + y - 2 = 0$ 恒过定点 $(0, -2)$ 和 $(0, 1)$, 故 B 错误;

对 C: 根据直线两点式方程的概念知, C 正确;

对 D: 设点 (x, y) 关于点 $(3, 2)$ 的对称点为 (x_0, y_0) , 则 $\begin{cases} x + x_0 = 6 \\ y + y_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6 - x \\ y_0 = 4 - y \end{cases}$,

由点 (x_0, y_0) 在直线 $2x - y + 3 = 0$ 上, 得 $2(6 - x) - (4 - y) + 3 = 0 \Rightarrow 2x - y - 11 = 0$, 故 D 正确.

故选: CD

10. 【正确答案】ABD

【详解】A 选项, 底面 $VABC$ 为等边三角形, G 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心,

$$\text{故 } \overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \overrightarrow{BP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{PA_1}, \text{ 故 } \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{A_1G} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}, \text{ A 正确;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B 选项, } \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \text{ 故 } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle CAA_1 - |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAA_1 = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = 0, \end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$, B 正确;

$$\text{C 选项, } \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{PG} = t\overrightarrow{BC_1}, \text{ 即 } \begin{cases} -t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ 无解, 故 } \overrightarrow{PG} \text{ 与 } \overrightarrow{BC_1} \text{ 不平行, C 错误;}$$

$$\begin{aligned} \text{D 选项, } |\overrightarrow{PG}|^2 &= \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{AA_1}|^2 - \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA_1} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cos \frac{\pi}{3} + \frac{4}{9}|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}| \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{9}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{PG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ D 正确.}$$

故选: ABD

11. 【正确答案】ABC

【详解】对 A, 圆 $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 故 $M(1,1)$,

又 PM 的最小值即 M 到 $2x+y+2=0$ 的距离 $d = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$, 故 A 正确;

对 B, 设 $P(m, -2m-2)$,

$$\text{由切线性质可得 } |AP| = |BP| = \sqrt{|\overrightarrow{MP}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2} = \sqrt{(m-1)^2 + (-2m-3)^2 - 4} = \sqrt{5m^2 + 10m + 6},$$

故以 P 为圆心, PA, PB 为半径的圆的方程为 $(x-m)^2 + (y+2m+2)^2 = 5m^2 + 10m + 6$,

即 $x^2 - 2mx + y^2 + (4m+4)y = 2m+2$, 又圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$,

方程相减可得 $(1-m)x + (2m+3)y - m = 0$, 即 $(-x+2y-1)m + x+3y = 0$.

联立 $\begin{cases} -x+2y-1=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$, 即直线 AB 恒过定点 $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$, 故 B 正确;

对 C, 设 $\angle MPA = \theta$, $|MP| = d$, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}| \cos 2\theta = |\vec{PA}|^2 (1 - 2\sin^2 \theta)$,

又 $|\vec{PA}|^2 = d^2 - 4$, $\sin \theta = \frac{2}{d}$, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (d^2 - 4) \left(1 - \frac{8}{d^2}\right) = d^2 + \frac{32}{d^2} - 12 \geq 8\sqrt{2} - 12$,

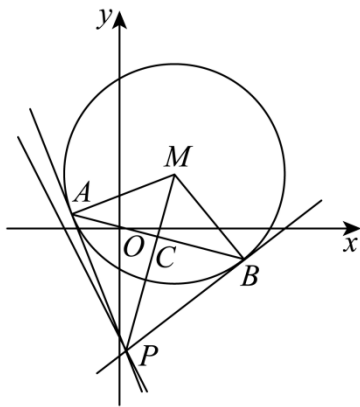
当且仅当 $d^2 = \frac{32}{d^2}$, 即 $d = 2^{\frac{5}{4}}$ 时取等号, 又由 A 可知 $|MP| = d \geq \sqrt{5}$, 故 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 能取最小值为 $8\sqrt{2} - 12$, 故 C 正确;

对 D, 设 $AB \cap MP = C$, 因为 $|MA| = |MB|, |MP| = |MP|, |AP| = |BP|$, 故 $\triangle AMP \cong \triangle BMP$,

则 $\angle AMP = \angle BMP$, 故 MC 为等腰 $\triangle AMB$ 的中线和高, 故 $|AC| = |BC|$, $MC \perp AB$.

$$|AB| = 2|AC| = 2|MA| \sin \angle AMC = 4\sqrt{1 - \cos^2 \angle AMC} = 4\sqrt{1 - \frac{|MA|^2}{|MP|^2}} = 4\sqrt{1 - \frac{4}{|MP|^2}},$$

故当 $|MP|$ 取最小值 $\sqrt{5}$ 时, $|AB|$ 取最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 故 D 错误.



故选: ABC

12. 【正确答案】 $x+2y-5=0$

【详解】由题可设所求直线方程为 $x+2y+c=0$,

代入点 $M(1,2)$, 可得 $1+4+c=0$, 即 $c=-5$,

所以经过点 $M(1,2)$ 且与直线 $2x-y+8=0$ 垂直的直线方程为 $x+2y-5=0$.

故答案为 $x+2y-5=0$

13. 【正确答案】 8

【详解】 两圆方程相减得 $4x+4y=8$ ，即 $x+y=2$ ，

所以 $4a+2b=2$ ， $2a+b=1$ ，

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=(2a+b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=4+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8$ ，当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$ ，即 $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

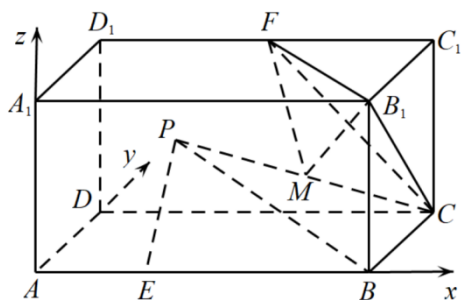
点 $(4a,2b)$ 为 $(1,1)$ ， $1^2+1^2<4$ ， $(1-2)^2+(1-2)^2<4$ ，点 $(4a,2b)$ 在两圆公共弦上，满足题意

，

故 8.

14. 【正确答案】 $2\sqrt{3}$ $\frac{9}{4}$

【详解】



①以 AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， AA_1 为 z 轴，建立如图所示的坐标系，则

$B(6,0,0), E(2,0,0)$ ，设 $P(x,y,0)$ ，

由 $BP=\sqrt{3}PE$ 得 $(x-6)^2+y^2=3[(x-2)^2+y^2]$ ，

所以 $x^2+y^2=12$ ，

所以若点 P 在平面 $ABCD$ 内运动，则点 P 所形成的阿氏圆的半径为 $2\sqrt{3}$ 。

②设点 $P(x,y,z)$ ，由 $BP=\sqrt{3}PE$ 得 $(x-6)^2+y^2+z^2=3[(x-2)^2+y^2+z^2]$ ，

所以 $x^2+y^2+z^2=12$ ，

由题得 $F(3,3,3), B_1(6,0,3), C(6,3,0)$ ，

所以 $\overrightarrow{FB_1} = (3, -3, 0)$, $\overrightarrow{B_1C} = (0, 3, -3)$, 设平面 B_1CF 的法向量为 $\vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{FB_1} = 3x_0 - 3y_0 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 3y_0 - 3z_0 = 0 \end{cases}, \therefore \vec{n} = (1, 1, 1),$$

由题得 $\overrightarrow{CP} = (x-6, y-3, z)$,

$$\text{所以点 } P \text{ 到平面 } B_1CF \text{ 的距离为 } h = \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|x+y+z-9|}{\sqrt{3}},$$

因为 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2) \geq (x+y+z)^2$, $\therefore -6 \leq x+y+z \leq 6$,

所以 $h_{\min} = \frac{|6-9|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, 所以点 M 到平面 B_1CF 的最小距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

由题得 $\triangle B_1CF$ 为等边三角形, 且边长为 $\sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$,

所以三棱锥 $M-B_1CF$ 的体积的最小值为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4}$.

故 $2\sqrt{3}$, $\frac{9}{4}$.

15. 【正确答案】(1) $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$

(2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【分析】(1) 运用两角和差的正弦公式, 辅助角公式化简, 整体代入求出单调减区间;

(2) 求出角度 $A = \frac{\pi}{3}$, 后运用余弦定理, 借助已知的方程, 联立求出 $bc = 6$, 最后用面积公式求解即可

【详解】(1) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos x$, 运用两角和差正弦得到,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x,$$

运用辅助角公式得到, $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$

(2) $f(A) = 2$, 则 $f(x) = 2 \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 2$, 即 $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, $A \in (0, \pi)$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$.

由余弦定理知道 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 即 $7 = b^2 + c^2 - bc$. (*)

而 $b+c=5$, 两边平方得到 $b^2 + c^2 + 2bc = 25$ 与 (*) 联立得到 $bc=6$.

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

16. 【正确答案】(1) $x - \sqrt{2}y + 5 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y + 5 = 0$

(2) $[6, 10]$

【详解】(1) 若 $r=6$ 时, 圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 36$, 可得圆心 $C(4, 0)$,

因为直线 l 被圆 C 截得的弦长为 6, 则圆心到直线 l 的距离为 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}$,

当直线 l 的斜率不存在时, 此时直线 l 的方程为 $x = -5$, 不满足题意;

当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y - 0 = k(x + 5)$, 即 $kx - y + 5k = 0$,

则 $\frac{|4k - 0 + 5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3\sqrt{3}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以直线方程为 $x - \sqrt{2}y + 5 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y + 5 = 0$,

综上可得, 所求直线 l 的方程为 $x - \sqrt{2}y + 5 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y + 5 = 0$.

(2) 因为动点 $P(x, y)$ 满足 $|PA|^2 + |PB|^2 = 10$, $A(-3, 0)$ 、 $B(-5, 0)$,

所以 $(x+3)^2 + y^2 + (x+5)^2 + y^2 = 10$, 化简得 $(x+4)^2 + y^2 = 4$,

所以动点 P 的轨迹是以 $D(-4, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆,

因为 P 的轨迹与圆 C 有公共点, 所以 $|r-2| \leq |CD| \leq r+2$,

即 $|r-2| \leq 8 \leq r+2$, 解得 $6 \leq r \leq 10$, 所以半径 r 的取值范围 $[6, 10]$.

17. 【正确答案】(1) 乙射击一次击中目标的概率为 $\frac{1}{3}$, 丙射击一次击中目标的概率为

$\frac{1}{3}$

(2) $\frac{4}{9}$

(3) 7

【分析】(1) 利用相互独立事件的概率公式计算可得;

(2) 记甲、乙、丙各射击一次恰有一人击中目标为事件 D ，根据相互独立事件及互斥事件的概率公式计算可得：

(3) 设甲射击 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 次，则至少有一次击中目标的概率为 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ，令

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$ ，根据指数函数的性质及对数的运算性质计算可得：

【详解】(1) 记甲射击一次击中目标为事件 A ，乙射击一次击中目标为事件 B ，丙射击一次击中目标为事件 C ，

依题意 $P(A) = \frac{1}{2}$ ， $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}$ ，所以 $P(B) = \frac{1}{3}$ ，

$P(BC) = P(B)P(C) = \frac{1}{9}$ ，所以 $P(C) = \frac{1}{3}$ ，

所以乙射击一次击中目标的概率为 $\frac{1}{3}$ ，丙射击一次击中目标的概率为 $\frac{1}{3}$ ；

(2) 记甲、乙、丙各射击一次恰有一人击中目标为事件 D ，

则 $P(D) = P(\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C})$

$= P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ ，

所以甲、乙、丙各射击一次恰有一人击中目标的概率 $\frac{4}{9}$ ；

(3) 设甲射击 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 次，则至少有一次击中目标的概率为 $1 - [P(\overline{A})]^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ，

令 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$ ，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100}$ ，

所以 $n \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} = \log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2} \approx \frac{2}{0.3010} \approx 6.6445$ ，

又 n 为正整数，所以 $n_{\min} = 7$ ，即甲至少要射击 7 次。

18. 【正确答案】(1) 证明见解析； $\frac{\pi}{4}$

(2) 存在， $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$

【详解】(1) 因为 $AB \perp AC$ ， $PB \perp AC$ ， $AB \cap PB = B$ ， $AB, PB \subset$ 平面 PAB ，

所以 $AC \perp$ 平面 PAB ，又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以平面 $ABCD \perp$ 平面 PAB ，

取 AB 的中点 M ，连接 PM ，因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形，

所以 $PM \perp AB$ ，又平面 $ABCD \perp$ 平面 PAB ，两平面交线为 AB ， $PM \subset$ 平面 PAB ，

所以 $PM \perp$ 平面 $ABCD$ ，

取 BC 的中点 G ，连接 MG ，则 $MG \parallel AC$ ，

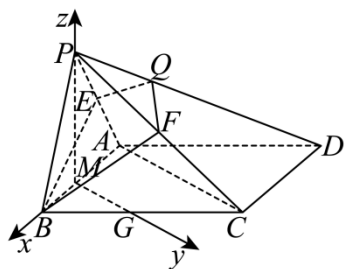
因为 $AC \perp$ 平面 PAB ，所以 $MG \perp$ 平面 PAB ，

因为 $AB, PM \subset$ 平面 PAB ，所以 $MG \perp AB$ ， $MG \perp PM$ ，

故 MG, AB, PM 两两垂直，以 M 为原点， MB, MG, MP 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，

因为 $BC = 2AB = 4$ ，由勾股定理得 $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ ，

所以 $B(1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), D(-3, 2\sqrt{3}, 0), A(-1, 0, 0)$ ，



平面 PAB 的法向量为 $\vec{m} = (0, 1, 0)$ ，设 PD 与平面 PAB 所成角的大小为 θ ，

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \vec{PD}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{PD} \cdot \vec{m}|}{|\vec{PD}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{|(-3, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \cdot (0, 1, 0)|}{\sqrt{9+12+3} \cdot 1} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

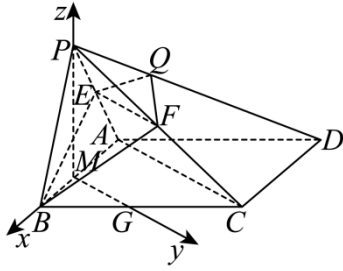
因为 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。

(2) 设平面 PAD 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{PA} \cdot \vec{n} = (-1, 0, -\sqrt{3}) \cdot (x_1, y_1, z_1) = -x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{PD} \cdot \vec{n} = (-3, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \cdot (x_1, y_1, z_1) = -3x_1 + 2\sqrt{3}y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases},$$

令 $z_1 = 1$ 得 $x_1 = -\sqrt{3}, y_1 = -1$ ，则 $\vec{n} = (-\sqrt{3}, -1, 1)$ ，

连接 EF ，因为 $AC \parallel$ 平面 $BEQF$ ，平面 $BEQF \perp$ 平面 $PAC = EF$ ，所以 $AC \parallel EF$ ，



不妨设 $\vec{PE} = \lambda \vec{PA}$, 则 $\vec{PF} = \lambda \vec{PC}$, $0 < \lambda \leq 1$,

设 $E(q, w, e)$, 则 $(q, w, e - \sqrt{3}) = \lambda(-1, 0, -\sqrt{3})$, 即 $q = -\lambda, w = 0, e = \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda$,

故 $E(-\lambda, 0, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$, 设 $F(r, t, y)$, 则 $(r, t, y - \sqrt{3}) = \lambda(-1, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$,

即 $r = -\lambda, t = 2\sqrt{3}\lambda, y = \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda$, 故 $F(-\lambda, 2\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$,

设平面 $BEQF$ 的法向量为 $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{BE} \cdot \vec{u} = (-\lambda - 1, 0, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (-\lambda - 1)x_2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)z_2 = 0 \\ \vec{BF} \cdot \vec{u} = (-\lambda - 1, 2\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (-\lambda - 1)x_2 + 2\sqrt{3}\lambda y_2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)z_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $y_2 = 0$, 设 $z_2 = 1$, 则 $x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1}$, 故 $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1}, 0, 1 \right)$,

$$\text{故 } |\cos \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\left| (-\sqrt{3}, -1, 1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1}, 0, 1 \right) \right|}{\sqrt{3+1+1} \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1} \right)^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{3\lambda - 3}{\lambda + 1} + 1 \right|}{\sqrt{5} \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1} \right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{35}}{35},$$

化简得 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1} \right)^2 + 1} = \sqrt{7} \left| \frac{4\lambda - 2}{\lambda + 1} \right|$, 两边平方得,

$$\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda}{\lambda + 1} \right)^2 + 1 = 7 \left(\frac{4\lambda - 2}{\lambda + 1} \right)^2, \text{ 化简得 } 4 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 7(16\lambda^2 - 16\lambda + 1),$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$, 设 $\frac{\vec{DQ}}{\vec{DP}} = \mu$, 则 $\vec{DQ} = \mu \vec{DP}$, 设 $Q(j, k, l)$,

则 $(j + 3, k - 2\sqrt{3}, l) = \mu(3, -2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 解得 $j = 3\mu - 3, k = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\mu, l = \sqrt{3}\mu$,

故 $\vec{BQ} = (3\mu - 4, 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\mu, \sqrt{3}\mu)$,

当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, $\mathbf{r}_u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1 \right)$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/847011155012010053>