

2023 年教育部新课标四省联考适应性测试试题-数学（安徽、
云南、吉林、黑龙江）

1. 设 $z = 1 + i$ ，则 $z^2 - i =$ ()
A. i B. $-i$ C. 1 D. -1
2. 设集合 $A = \{2, 3, a^2 - 2a - 3\}$ ， $B = \{0, 3\}$ ， $C = \{2, a\}$. 若 $B \subseteq A$ ， $A \cap C = \{2\}$ ，则 $a =$ ()
A. -3 B. -1 C. 1 D. 3
3. 甲、乙、丙、丁四名教师带领学生参加校园植树活动，教师随机分成三组，每组至少一人，则甲、乙在同一组的概率为 ()
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
4. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相互垂直，已知 $\vec{a} = (6, -8)$ ， $|\vec{b}| = 5$ ，且 $\vec{b}$ 与向量 $(1, 0)$ 的夹角是钝角，则 $\vec{b} =$ ()
A. $(-3, -4)$ B. $(4, 3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-4, -3)$
5. 已知点 A，B，C 为椭圆 D 的三个顶点，若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则 D 的离心率是 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. 三棱锥 $A - BCD$ 中， $AC \perp$ 平面 BCD ， $BD \perp CD$. 若 $AB = 3$ ， $BD = 1$ ，则该三棱锥体积的最大值为 ()
A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$
7. 设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在导函数，且 $f'(x) < g'(x)$ ，则当 $x \in (a, b)$ 时 ()
A. $f(x) < g(x)$ B. $f(x) > g(x)$
C. $f(x) + g(a) < g(x) + f(a)$ D. $f(x) + g(b) < g(x) + f(b)$
8. 已知 a, b, c 满足 $a = \log_5(2^b + 3^b)$ ， $c = \log_3(5^b - 2^b)$ ，则 ()
A. $|a - c| \geq |b - c|$ ， $|a - b| \geq |b - c|$ B. $|a - c| \geq |b - c|$ ， $|a - b| \leq |b - c|$
C. $|a - c| \leq |b - c|$ ， $|a - b| \geq |b - c|$ D. $|a - c| \leq |b - c|$ ， $|a - b| \leq |b - c|$
9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数， $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$ ， $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调递减，则 ()
A. $f(f(1)) < f(f(2))$ B. $f(g(1)) < f(g(2))$
C. $g(f(1)) < g(f(2))$ D. $g(g(1)) < g(g(2))$
10. 已知平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$ ，B，D 是 l 上两点，直线 $AB \subset \alpha$ 且 $AB \cap l = B$ ，直线 $CD \subset \beta$ 且 $CD \cap l = D$. 结论中，错误的有 ()

A. 若 $AB \perp l$, $CD \perp l$, 且 $AB = CD$, 则 ABCD 是平行四边形

B. 若 M 是 AB 中点, N 是 CD 中点, 则 $MN \parallel AC$

C. 若 $\alpha \perp \beta$, $AB \perp l$, $AC \perp l$, 则 CD 在 α 上的射影是 BD

D. 直线 AB, CD 所成角的大小与二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小相等

11. 质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心, 半径为 1 的 $\odot O$ 上逆时针作匀速圆周运动, 同时出发. P 的角速度大小为 2rad/s , 起点为 $\odot O$ 与 x 轴正半轴的交点; Q 的角速度大小为 5rad/s , 起点为射线 $y = -\sqrt{3}x (x \geq 0)$ 与 $\odot O$ 的交点. 则当 Q 与 P 重合时, Q 的坐标可以为 ()

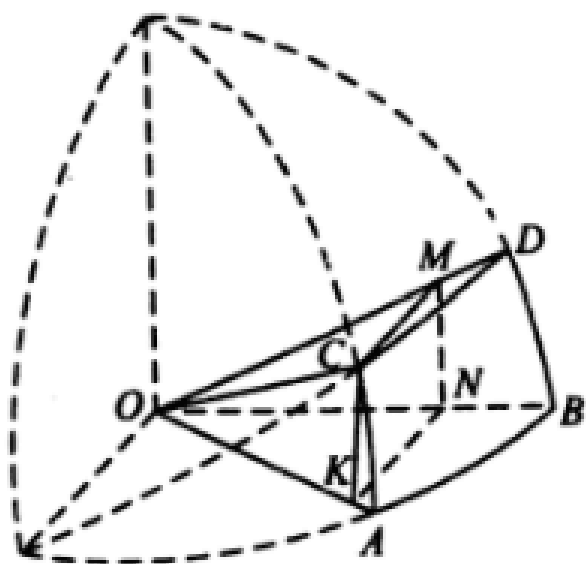
A. $(\cos \frac{2\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9})$

B. $(-\cos \frac{5\pi}{9}, -\sin \frac{5\pi}{9})$

C. $(\cos \frac{\pi}{9}, -\sin \frac{\pi}{9})$

D. $(-\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9})$

12. 下图改编自李约瑟所著的《中国科学技术史》, 用于说明元代数学家郭守敬在编制《授时历》时所做的天文计算. 图中的 $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{CD}$ 都是以 O 为圆心的圆弧, CMNK 是为计算所作的矩形, 其中 M, N, K 分别在线段 OD, OB, OA 上, $MN \perp OB$, $KN \perp OB$. 记 $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle BOD$, $\delta = \angle COD$, 则 ()



A. $\sin \beta = \sin \gamma \cos \delta$

B. $\cos \beta = \cos \gamma \cos \delta$

C. $\sin \alpha = \frac{\sin \delta}{\cos \beta}$

D. $\cos \alpha = \frac{\cos \gamma \cos \delta}{\cos \beta}$

13. 某工厂生产的产品的质量指标服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$. 质量指标介于 99 至 101 之间的产品为良品, 为使这种产品的良品率达到 95.45%, 则需调整生产工艺, 使得 σ 至多为 _____. (若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$)

14. 若 P, Q 分别是抛物线 $x^2 = y$ 与圆 C: $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 上的点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 _____.

15. 数学家祖冲之曾给出圆周率 π 的两个近似值: “约率” $\frac{22}{7}$ 与“密率” $\frac{355}{113}$. 它们可用“调日法”得到: 称小于 3.1415926 的近似值为弱率, 大于 3.1415927 的近似值为强率. 由

$\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1}$, 取 3 为弱率, 4 为强率, 得 $a_1 = \frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}$, 故 a_1 为强率, 与上一次的弱率 3

计算得 $a_2 = \frac{3+7}{1+2} = \frac{10}{3}$, 故 a_2 为强率, 继续计算, $\cdots$, 若某次得到的近似值为强率, 与上

一次的弱率继续计算得到新的近似值; 若某次得到的近似值为弱率, 与上一次的强率继续计算

得到新的近似值, 依此类推. 已知 $a_m = \frac{22}{7}$, 则 $m =$ _____; $a_8 =$ _____.

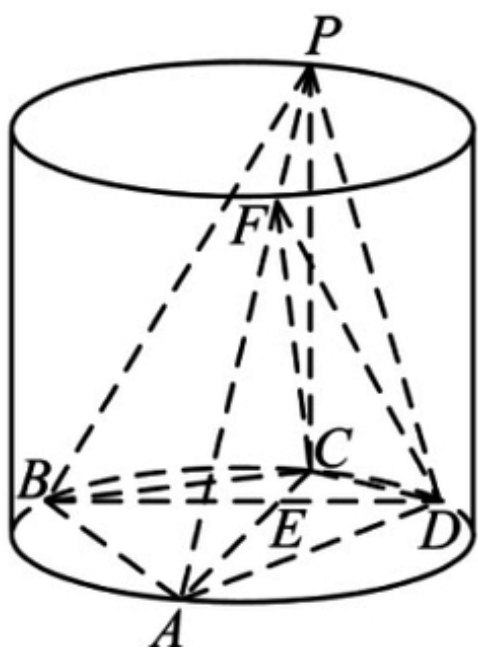
16. 如图为一个开关阵列, 每个开关只有“开”和“关”两种状态, 按其中一个开关 1 次, 将导致自身和所有相邻的开关改变状态. 例如, 按 $(2, 2)$ 将导致 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ 改变状态. 如果要求只改变 $(1, 1)$ 的状态, 则需按开关的最少次数为_____.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆柱底面的内接四边形, AC 是圆柱的底面直径, PC 是圆柱的母线, E 是 AC 与 BD 的交点, $AB = AD$, $\angle BAD = 60^\circ$.

(1) 记圆柱的体积为 V_1 , 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$;

(2) 设点 F 在线段 AP 上, $PA = 4PF$, $PC = 4CE$, 求二面角 $F-CD-P$ 的余弦值.



18. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 单调, 其中 ω 为正整数, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 且

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3}).$$

(1) 求 $y = f(x)$ 图像的一条对称轴;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ .

19. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $a_1 = 1$, $a_n = T_{n-1} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 m 为整数, 且对任意 $n \in N^*$, $m \geq \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n}$, 求 m 的最小值.

20. 一个池塘里的鱼的数记为 N , 从池塘里捞出 200 尾鱼, 并给鱼做上标识, 然后把鱼放回池塘里, 过一小段时间后再从池塘里捞出 500 尾鱼, X 表示捞出的 500 尾鱼中有标识的鱼的数目.

(1) 若 $N = 5000$, 求 X 的数学期望;

(2) 已知捞出的 500 尾鱼中 15 尾有标识, 试给出 N 的估计值 (以使得 $P(X = 15)$ 最大的 N 的值作为 N 的估计值).

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $A(4\sqrt{2}, 3)$, 且焦距为 10.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 $B(4\sqrt{2}, -3)$, $D(2\sqrt{2}, 0)$, E 为线段 AB 上一点, 且直线 DE 交 C 于 G, H 两点.

证明: $\frac{|GD|}{|GE|} = \frac{|HD|}{|HE|}$.

22. 椭圆曲线加密算法运用于区块链.

椭圆曲线 $C = \{(x, y) | y^2 = x^3 + ax + b, 4a^3 + 27b^2 \neq 0\}$. $P \in C$ 关于 x 轴的对称点记为 $\tilde{P}$. C 在点 $P(x, y) (y \neq 0)$ 处的切线是指曲线 $y = \pm \sqrt{x^3 + ax + b}$ 在点 P 处的切线. 定义 “ $\oplus$ ” 运算满足:

①若 $P \in C$, $Q \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点 R , 则 $P \oplus Q = \tilde{R}$; ②若 $P \in C$, $Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 则 $P \oplus Q = \tilde{P}$; ③若 $P \in C$, 规定 $P \oplus \tilde{P} = 0^*$, 且 $P \oplus 0^* = 0^* \oplus P = P$.

(1) 当 $4a^3 + 27b^2 = 0$ 时, 讨论函数 $h(x) = x^3 + ax + b$ 零点的个数;

(2) 已知 “ $\oplus$ ” 运算满足交换律、结合律, 若 $P \in C$, $Q \in C$, 且 PQ 为 C 的切线, 切点为 P , 证明: $P \oplus P = \tilde{Q}$;

(3) 已知 $P(x_1, y_1) \in C$, $Q(x_2, y_2) \in C$, 且直线 PQ 与 C 有第三个交点, 求 $P \oplus Q$ 的坐标. 参考公式: $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$.

答案和解析

1. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查复数代数形式的四则运算，属于基础题.

利用复数的四则运算法则可求出结果.

【解答】

解： $z = 1 + i$ ，

则 $z^2 - i = (1 + i)^2 - i = i$ ，

故选 A.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查含参数的集合关系的问题，交集运算，属于基础题.

根据包含关系结合交集的结果可求 a 的值.

【解答】

解：因为 $B \subseteq A$ ，则 $a^2 - 2a - 3 = 0$ ，解得 $a = -1$ 或 $a = 3$ ，

若 $a = -1$ ，则 $A = \{2, 3, 0\}$ ， $C = \{2, -1\}$ ，此时 $A \cap C = \{2\}$ ，符合题意；

若 $a = 3$ ，则 $A = \{2, 3, 0\}$ ， $C = \{2, 3\}$ ，此时 $A \cap C = \{2, 3\}$ ，不符合题意，

故 $a = -1$.

故选 B.

3. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查古典概型及其计算，组合与组合数公式，属于基础题.

利用组合可求基本事件的总数，从而可求对应的概率.

【解答】

解：设“甲、乙在同一组”为事件 A，

教师随机分成三组，每组至少一人的分法有 $C_4^2 = 6$ 种，

而甲、乙在同一组的分法有 1 种，故 $P(A) = \frac{1}{6}$ ，

故选 A.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查向量数量积的坐标运算，向量的模的坐标运算，属于基础题.

设 $\vec{b} = (x, y)$ ，则由题意得 $\begin{cases} 6x - 8y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ ，解出方程，检验即可.

【解答】

解：设 $\vec{b} = (x, y)$ ，则由题意得 $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} 6x - 8y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$ ，

设 $\vec{c} = (1, 0)$ ，当 $\vec{b} = (4, 3)$ 时，此时 $\cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = \frac{4}{5} > 0$ ，

又因为向量夹角范围为 $[0, \pi]$ ，故此时夹角为锐角，舍去；

当 $\vec{b} = (-4, -3)$ 时，此时 $\cos \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} = -\frac{4}{5} < 0$ ，故此时夹角为钝角，

故选 D.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查求椭圆的离心率，椭圆的性质，属于基础题.

首先由题得到 $2b = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，结合 $a^2 = b^2 + c^2$ ，即可求得 e .

【解答】

解：无论椭圆焦点位于 x 轴或 y 轴，根据点 A，B，C 为椭圆 D 的三个顶点，

若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则 $2b = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，即 $a^2 = 3b^2$ ，则 $a^2 = 3(a^2 - c^2)$ ，

即有 $2a^2 = 3c^2$ ，则 $e^2 = \frac{2}{3}$ ，

又 $0 < e < 1$ ，解得 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选 C.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查棱锥的体积，线面垂直的性质，属于中档题.

先利用线面垂直的判定定理与性质定理依次证得 $BD \perp$ 平面 ACD 、 $BD \perp AD$ 与 $AC \perp CD$ ，从而利用基本不等式求得 $S_{\triangle ACD} \leq 2$ ，进而得到 $V_{A-BCD} = V_{B-ACD} \leq \frac{2}{3}$ ，由此得解.

【解答】

解：因为 $AC \perp$ 平面 BCD ， $BD \subset$ 平面 BCD ，

所以 $AC \perp BD$ ，

因为 $BD \perp CD$ ， $AC \cap CD = C$ ， $AC, CD \subset$ 平面 ACD ，

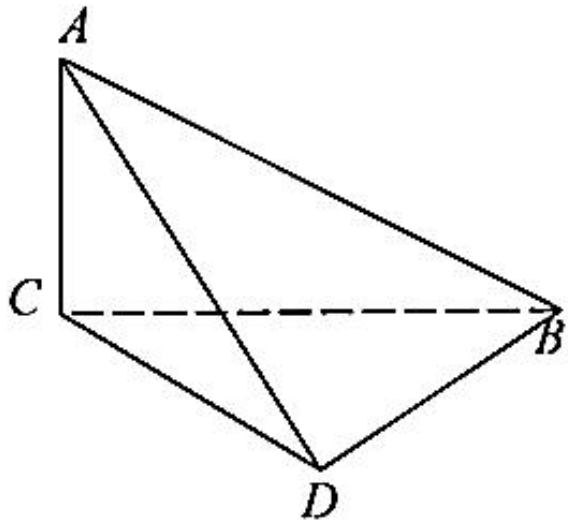
所以 $BD \perp$ 平面 ACD ，

因为 $AD \subset$ 平面 ACD ，

所以 $BD \perp AD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB = 3$ ， $BD = 1$ ，则 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 2\sqrt{2}$ ，

因为 $AC \perp$ 平面 BCD ， $CD \subset$ 平面 BCD ，所以 $AC \perp CD$ ，



在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，不妨设 $AC = a$ ， $CD = b$ ($a > 0, b > 0$)，则由 $AC^2 + CD^2 = AD^2$ ，得 $a^2 + b^2 = 8$ ，

所以 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot CD = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4} \times 2ab \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = 2$ ，

当且仅当 $a = b$ 且 $a^2 + b^2 = 8$ ，即 $a = b = 2$ 时，等号成立，

所以 $V_{A-BCD} = V_{B-ACD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACD} \cdot BD \leq \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ ，

所以该三棱锥体积的最大值为 $\frac{2}{3}$.

故选 D.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查利用导数比较大小，利用导数求函数的单调性，属于中档题.

对于 AB，利用特殊函数法，举反例即可排除;对于 CD，构造函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ ，利用导数与函数单调性的关系证得 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，从而得以判断.

【解答】

解：对于 AB，不妨设 $f(x) = -2x$ ， $g(x) = 1$ ，则 $f'(x) = -2$ ， $g'(x) = 0$ ，满足题意，

若 $x = -1 \in (a, b)$ ，则 $f(x) = 2 > 1 = g(x)$ ，故 A 错误，

若 $x = 0 \in (a, b)$ ，则 $f(x) = 0 < 1 = g(x)$ ，故 B 错误；

对于 CD，因为函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在导函数，且 $f'(x) < g'(x)$ ，

令 $h(x) = f(x) - g(x)$ ，则 $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，

因为 $x \in (a, b)$ ，即 $a < x < b$ ，所以 $h(b) < h(x) < h(a)$ ，

由 $h(x) < h(a)$ ，得 $f(x) - g(x) < f(a) - g(a)$ ，则 $f(x) + g(a) < g(x) + f(a)$ ，故 C 正确；

由 $h(b) < h(x)$ ，得 $f(b) - g(b) < f(x) - g(x)$ ，则 $f(x) + g(b) > g(x) + f(b)$ ，故 D 错误.

故选 C.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查不等式的性质，考查利用函数单调性证明不等式，属于较难题.

由题意得 $5^b - 2^b > 0$ ，可得 $b > 0$ ，构造函数 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ ，利用其单调性，分 $b > 1$ ，

$b = 1$ ， $b < 1$ 讨论即可.

【解答】

解：由题意得 $5^b - 2^b > 0$ ，即 $5^b > 2^b$ ，则 $0 < \left(\frac{2}{5}\right)^b < 1$ ，可得 $b > 0$ ，

令 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ ，则 $f(1) = 1$ ，

根据减函数加减函数为减函数的结论知， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，

当 $b > 1$ 时，可得 $\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b < 1$ ， $\therefore 2^b + 3^b < 5^b$ ，两边同取以 5 为底的对数得

$a = \log_5(2^b + 3^b) < \log_5 5^b = b$ ，

对 $2^b + 3^b < 5^b$ 通过移项得 $5^b - 2^b > 3^b$,

两边同取以 3 为底的对数得 $c = \log_3(5^b - 2^b) > b$,

所以 $c > b > a$, 所以 $-b < -a$,

所以 $c - b < c - a$, 且 $c - b > 0$, $c - a > 0$,

故此时, $|a - c| > |b - c|$, 故 C, D 选项错误,

当 $b = 2$ 时, $a = \log_5 13$, $c = \log_3 21$, $c - b = \log_3 21 - 2 = \log_3 \frac{7}{3} \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$b - a = 2 - \log_5 13 = \log_5 \frac{25}{13} \in (0, \frac{1}{2})$, $\therefore c - b > b - a$, 且 $c - b > 0$, $b - a > 0$, 所以

$|a - b| \leq |b - c|$, 故 A 错误,

下面严格证明: 当 $b > 1$ 时, $0 < b - a < c - b$,

$$b - a = b - \log_5(2^b + 3^b) = \log_5\left(\frac{5^b}{2^b + 3^b}\right) = \log_5\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b}\right),$$

$$c - b = \log_3(5^b - 2^b) - b = \log_3\left[\left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b\right]$$

根据函数 $h(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 且 $h(1) = 1$,

则当 $b > 1$ 时, 有 $1 < \left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b$,

$$\because 0 < \left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b < 1, \quad \therefore 1 < \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b},$$

下面证明: $\frac{5^b}{2^b + 3^b} < \frac{5^b - 2^b}{3^b}$, $b > 1$,

$$\text{要证: } \frac{5^b}{2^b + 3^b} < \frac{5^b - 2^b}{3^b},$$

即证: $15^b < (2^b + 3^b)(5^b - 2^b)$, 等价于证明 $4^b + 6^b < 10^b$,

即证: $\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) < 1$, 此式开头已证明,

对 $\frac{5^b}{2^b + 3^b} < \frac{5^b - 2^b}{3^b}$, 左边分子分母同除以 5^b , 右边分子分母同除以 3^b 得

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b} < \left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b,$$

$$\text{则 } 0 < b - a = \log_5 \left(\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b} \right) < \log_5 \left[\left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b \right] < \log_3 \left[\left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b \right] = c - b,$$

故当 $b > 1$ 时, $0 < b - a < c - b$, 则 $|a - b| < |b - c|$,

当 $0 < b < 1$ 时, 可得 $\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b > 1$,

$\therefore 2^b + 3^b > 5^b$, 两边同取以 5 为底的对数得 $a = \log_5(2^b + 3^b) > \log_5 5^b = b$,

对 $2^b + 3^b > 5^b$ 通过移项得 $5^b - 2^b < 3^b$,

两边同取以 3 为底的对数得 $c = \log_3(5^b - 2^b) < b$,

所以 $c < b < a$, 所以 $-b > -a$,

所以 $c - b > c - a$, 且 $c - b < 0$, $c - a < 0$,

故 $0 < b - c < a - c$, 故此时 $|a - c| > |b - c|$,

下面严格证明: 当 $0 < b < 1$ 时, $c - b < b - a < 0$,

当 $0 < b < 1$ 时, 根据函数 $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $f(1) = 1$, 且其在 $\mathbb{R}$ 上单调递减,

$$\text{可知 } \left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b > 1, \text{ 则 } 0 < \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b} < 1, \text{ 则 } b - a = \log_5 \left(\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b} \right) < 0,$$

根据函数 $h(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 且 $h(1) = 1$,

则当 $0 < b < 1$ 时, $0 < \left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b < 1$,

下面证明: $\frac{5^b}{2^b + 3^b} > \frac{5^b - 2^b}{3^b}$, ($0 < b < 1$),

$$\text{要证: } \frac{5^b}{2^b + 3^b} > \frac{5^b - 2^b}{3^b}$$

即证: $15^b > (2^b + 3^b)(5^b - 2^b)$, 等价于证 $4^b + 6^b > 10^b$,

即证: $\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b > 1$, 此式已证明,

对 $\frac{5^b}{2^b + 3^b} > \frac{5^b - 2^b}{3^b}$, 左边分子分母同除以 5^b , 右边分子分母同除以 3^b 得

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^b + \left(\frac{3}{5}\right)^b} > \left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{2}{3}\right)^b,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/847016140163006161>