

目 录

第 1 章 函数、极限与连续

1	/	1.1–1.2	函数的基本概念及初等函数
5	/	1.3	极限的概念
10	/	1.4	极限的性质与运算
15	/	1.5	无穷小量
20	/	1.6	函数的连续性
25	/	1.7	闭区间上连续函数的性质
27	/	第 1 章	综合练习
29	/		考研试题精选

第 2 章 导数与微分

31	/	2.1	导数概念
36	/	2.2	导数的运算法则
42	/	2.3	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
45	/	2.4	高阶导数
49	/	2.5	微分
54	/	第 2 章	综合练习
58	/		考研试题精选

第 3 章 微分中值定理及导数的应用

59	/	3.1	微分中值定理
62	/	3.2	洛必达法则
65	/	3.3	函数的单调性与极值
68	/	3.4	函数的凹凸性及曲线的拐点
71	/	3.5	函数图形的描绘
73	/	第 3 章	综合练习

75 / 考研试题精选

第 4 章 不定积分

76 / 4.1 不定积分的概念与性质

81 / 4.2 换元积分法

85 / 4.3 分部积分法

88 / 4.4 有理函数积分

90 / 第 4 章 综合练习

92 / 考研试题精选

第 5 章 定积分

93 / 5.1 定积分的概念与性质

97 / 5.2 微积分基本公式

103 / 5.3 定积分的换元法与分部积分法

109 / 5.4 广义积分

115 / 5.5 定积分的几何应用

117 / 第 5 章 综合练习

121 / 考研试题精选

第 1 章 函数、极限与连续

1.1-1.2 函数的基本概念及初等函数

【知识点梳理】

1) 邻域

设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域半径. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$.

2) 函数的特性

(1) 函数的有界性

设 $f(x)$ 在集合 X 上有定义, 若 $\exists M > 0$, 使得对 $\forall x \in X$, 都有 $|f(x)| < M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界; 否则, 称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(2) 函数的单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增; 若对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递减.

(3) 函数的奇偶性

设 $f(x)$ 的定义在关于原点对称的区间 $I = (-a, a)$ 上, 其中 $a > 0$. 若对 $\forall x \in I$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上为奇函数. 此时, 函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称; 若对 $\forall x \in I$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上为偶函数. 此时, 函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

(4) 函数的周期性

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 若 $\exists T > 0$, 对 $\forall x \in I$, 恒有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$,

则称函数 $f(x)$ 为周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

3) 反函数

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,值域为 H ,如果对于任意的 $y \in H$,必有唯一的 $x \in D$,使得 $x=g(y)$ 成立,则称在 H 上确定了 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y), y \in H$.

4) 初等函数

(1) 六类基本初等函数

常值函数: $y=C, C$ 为常数;

幂函数: $y=x^\mu, \mu$ 为常数;

指数函数: $y=a^x, a>0$ 且 $a \neq 1$;

对数函数: $y=\log_a x, a>0$ 且 $a \neq 1$;

三角函数: $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等;

反三角函数: $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

(2) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算而构成的可用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

【典型题型练习】

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(2) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}.$$

2. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \frac{2-x}{2+x};$$

$$(2) y = 1 + \lg(x+2).$$

3. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$.

4. 指出下列函数的复合过程.

$$(1) y = e^{\cos \frac{1}{x}};$$

$$(2) y = \tan(\ln \sqrt{2x}).$$

【能力提升】

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

2. 研究表明,如果将一个白血病细胞注入一只健康的小白鼠体内,那么大约需要半天时间这个白血病细胞就会分裂成两个白血病细胞. 因此,一天后小白鼠体内就会有 4 个白血病细胞. 而这种倍数增长模式将会一直持续到小白鼠体内产生 10 亿个白血病细胞,此时,小白鼠就会死亡.

(1) 请给出经过 t 天后,小白鼠体内的白血病细胞数目 N ;

(2) 请计算小白鼠会在多少天后死亡.

1.3 极限的概念

【知识点梳理】

1) 极限的直观定义

当 x 无限接近于某个常数 x_0 但不等于 x_0 时, 若 $f(x)$ 无限趋向于常数 A , 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

2) 极限的精确定义

(1) 函数在某一点 x_0 处的极限

给定函数 $f(x)$ 和常数 A , 若对于 $\forall \varepsilon > 0$ (无论 ε 多么小), 总 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

简记形式:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 总有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

(2) 函数在无穷远处的极限

给定函数 $f(x)$ 和常数 A , 若对于 $\forall \varepsilon > 0$ (无论 ε 多么小), 总 $\exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

(3) 单侧极限

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的右极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x_0 + 0) = A$.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists \delta > 0$, 使得当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的左极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x_0 - 0) = A$.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时的极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷大时的极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

(4) 数列极限的定义

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 总有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的极限, 记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a ; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散.

3) 函数极限的性质(高频考点)

函数在某一点 x_0 处极限存在当且仅当在 x_0 处的左极限和右极限都存在并且相等; 函数在无穷远处的极限存在当且仅当自变量趋于正无穷时的极限和趋于负无穷时的极限都存在并且相等.

【典型题型练习】

1. 画出函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ x-1, & 1 < x < 2 \\ 5-x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ 的图像, 然后求下面表达式的值或说明值不存在:

(1) $f(1)$; (2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; (3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; (4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

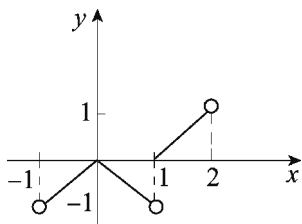
2. 假设某一天, 函数 $f(x) = x^2$ 已被画出了精准的图像. 但这天晚上, 一位神秘人对图像的约 100 万个不同位置的函数值作了改动. 请思考改动以后, 对于任意的 a , 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 是否发生变化? 为什么?

3. 讨论函数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x = 0$ 的极限是否存在.

4. 对图示的函数 $f(x)$, 下列陈述中哪些是对的? 哪些是错的?

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; (3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$; (5) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.



5. 下列各题中,哪些数列收敛? 哪些数列发散? 对收敛数列,通过分析 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限.

(1) $x_n = \frac{1}{2^n}$; (2) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; (3) $x_n = n \cdot (-1)^n$.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$, 试分别讨论 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1$ 时的极限.

【能力提升】

设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 是有理数} \\ -x, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

1.4 极限的性质与运算

【知识点梳理】

1) 极限的性质

(1) 唯一性: 极限若存在, 则必唯一.

(2) 局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 $M > 0$ 及 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$

时, 有 $|f(x)| \leq M$.

(3) 局部保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 使得当

$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

2) 极限的运算法则

(1) 极限的四则运算法则: 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

(i) $\lim [f(x) \pm g(x)]$ 存在, 且 $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(ii) $\lim [f(x) \cdot g(x)]$ 存在, 且 $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$;

(iii) 若 $B \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$;

其中, 记号“ $\lim$ ”下面没有标明自变量的变化过程, 是想表示此定理对自变量变化过程的各种形式均适用.

(2) 当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & m > n \\ \frac{a_0}{b_0}, & m = n \\ \infty, & m < n \end{cases}.$$

(3) 复合函数的极限运算: 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = g(x)$

复合而成, 且 $y = f[g(x)]$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且

存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$.

3) 极限存在准则及两个重要极限

(1) 夹逼准则: 若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足:

(i) 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$;

则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且等于 A .

注: 夹逼准则对自变量变化的各种形式均使用.

第一个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限. 可具体描述为: 单调递增数列若有上界, 则必有极限; 而单调递减数列若有下界, 则必有极限.

第二个重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

【典型题型练习】

1. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^4 - 3x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{(\sin x)^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+n}{x-n} \right)^x;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{2 \cot x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}.$$

$$3. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{\tan \alpha x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 存在, 求 } \alpha \text{ 的值.}$$

$$4. \text{ 用夹逼定理求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right).$$

【能力提升】

1. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/847035064120006160>