

2024 届云南衡水实验中学高三第四次适应性训练数学试题试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

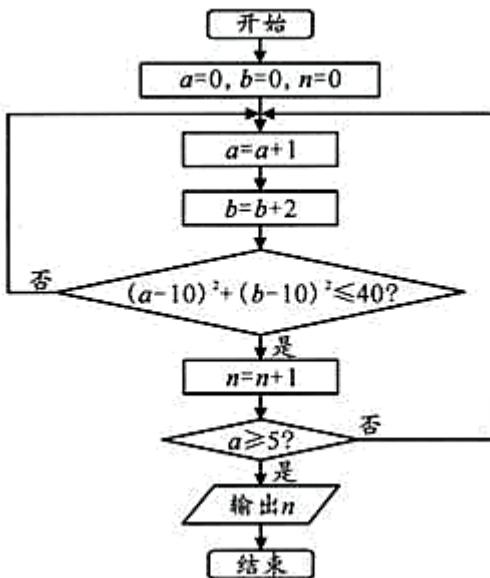
1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{1}{2}x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - kx$ 有三个零点，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(0, 1)$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2. 已知 $a = 5^{\frac{1}{5}}, b = \log_4 \sqrt{5}, c = \log_5 2$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

3. 执行如图所示的程序框图，则输出的 n 的值为 ()



- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

4. 设递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_4 = \frac{40}{3}$ ， $3a_4 - 10a_3 + 3a_2 = 0$ ，则 $a_4 =$ ()

- A. 9 B. 27 C. 81 D. $\frac{8}{3}$

5. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在抛物线上，且 $|AF| = 5$ ，过点 F 的动直线 l 与抛物线 B, C 交于两点， O

为坐标原点，抛物线的准线与 x 轴的交点为 M .给出下列四个命题：

- ①在抛物线上满足条件的点 A 仅有一个；
- ②若 P 是抛物线准线上一动点，则 $|PA| + |PO|$ 的最小值为 $2\sqrt{13}$ ；
- ③无论过点 F 的直线 l 在什么位置，总有 $\angle OMB = \angle OMC$ ；
- ④若点 C 在抛物线准线上的射影为 D ，则三点 B 、 O 、 D 在同一条直线上.

其中所有正确命题的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} [x], & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 若 $f(x) - ax = 0$ 有且仅有 3 个零点, 则实数 a 的

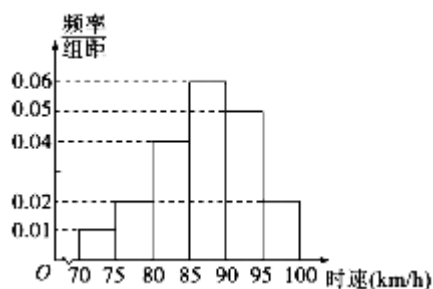
取值范围是（ ）

- A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ C. $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ D. $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$

7. 已知 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + x$, 则不等式 $f(x) + f(3-2x) \leq 2$ 的解集是（ ）

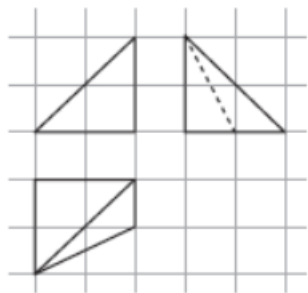
- A. $[1, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 1]$

8. 港珠澳大桥于 2018 年 10 月 2 刻日正式通车, 它是中国境内一座连接香港、珠海和澳门的桥隧工程, 桥隧全长 55 千米. 桥面为双向六车道高速公路, 大桥通行限速 100km/h , 现对大桥某路段上 1000 辆汽车的行驶速度进行抽样调查. 画出频率分布直方图 (如图), 根据直方图估计在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的车辆数和行驶速度超过 90km/h 的频率分别为（ ）



- A. 300, 0.25 B. 300, 0.35 C. 60, 0.25 D. 60, 0.35

9. 如图网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的所有棱中最长棱的长度为（ ）



- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 1

10. 已知函数 $f(x) = 4\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left[0, \frac{13}{3}\pi\right]$, 若函数 $F(x) = f(x) - 3$ 的所有零点依次记为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 且 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, 则 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n =$ ()

- A. $\frac{50\pi}{3}$ B. 21π C. $\frac{100\pi}{3}$ D. 42π

11. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $PA = \sqrt{5}$, E 为 PC 的中点, 则异面直线 BE 与 PD 所成角的余弦值为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{13}}{39}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{39}$ C. $-\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

12. 函数 $y = \frac{x + \sin x}{1 + x^2}$ 的部分图象大致为 ()



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 五声音阶是中国古乐基本音阶, 故有成语“五音不全”. 中国古乐中的五声音阶依次为: 宫、商、角、徵、羽, 如果把这五个音阶全用上, 排成一个五个音阶的音序, 且要求宫、羽两音阶不相邻且在角音阶的同侧, 可排成_____种不同的音序.

14. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 为 C 上一点, PQ 垂直 l 于点 Q , M, N 分别为 PQ, PF 的中点, MN 与 x 轴相交于点 R , 若 $\angle NRF = 60^\circ$, 则 $|FR|$ 等于_____.

15. 正四面体 $A-BCD$ 的各个点在平面 M 同侧, 各点到平面 M 的距离分别为 1, 2, 3, 4, 则正四面体的棱长为_____.

16. 设函数 $f(x) = \ln x + \ln(2-x) + ax (a > 0)$, 若 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$, 则 $a =$ _____.

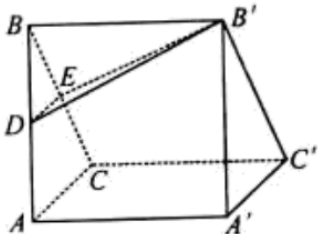
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax - (a+1)\ln x - \frac{1}{x} + 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 单调性;

(2) 当 $a = -2$ 时, 求证: $f(x) < e^x - 2x - \frac{1}{x}$.

18. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, $AC \perp AB$, $A'A = AB = AC = 2$, D, E 分别为 AB, BC 的中点.



(1) 证明: 平面 $B'DE \perp$ 平面 $A'ABB'$;

(2) 求点 C' 到平面 $B'DE$ 的距离.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(\frac{A}{2}) = 1$ 且 A 为锐角, $a=3, \sin C = 2\sin B$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足, $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

(I) 求 a_n 与 b_n ;

(II) 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, & n \text{ 为奇数,} \\ -\frac{1}{a_n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 若对 $n \in \mathbf{N}^*$, $T_{2n} \geq T_{2k}$ 恒成立, 求正整数 k 的值.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = \sin(\frac{\omega x}{3} - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{6} + 1 (\omega > 0)$, 直线 $y = \sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象相邻两交点的距离为 2π .

(I) 求 ω 的值;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若点 $(\frac{B}{2}, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心, 且 $b = 5$,

求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

22. (10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| + 2|x-a|$.

(1) 设 $a=1$, 求不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集;

(2) 已知 $a > -1$, 且 $f(x)$ 的最小值等于 3, 求实数 a 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

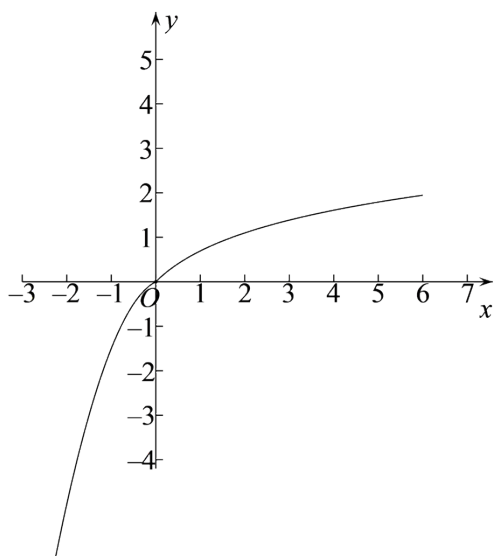
1、B

【解析】

根据所给函数解析式, 画出函数图像. 结合图像, 分段讨论函数的零点情况: 易知 $x=0$ 为 $g(x) = f(x) - kx$ 的一个零点; 对于当 $x < 0$ 时, 由代入解析式解方程可求得零点, 结合 $x < 0$ 即可求得 k 的范围; 对于当 $x > 0$ 时, 结合导函数, 结合导数的几何意义即可判断 k 的范围. 综合后可得 k 的范围.

【详解】

根据题意, 画出函数图像如下图所示:



函数 $g(x) = f(x) - kx$ 的零点, 即 $f(x) = kx$.

由图像可知, $f(0) = 0$,

所以 $x=0$ 是 $f(x)-kx=0$ 的一个零点,

当 $x<0$ 时, $f(x)=-x^2+\frac{1}{2}x$, 若 $f(x)-kx=0$,

则 $-x^2+\frac{1}{2}x-kx=0$, 即 $x=\frac{1}{2}-k$, 所以 $\frac{1}{2}-k<0$, 解得 $\frac{1}{2}<k$;

当 $x>0$ 时, $f(x)=\ln(x+1)$,

则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$, 且 $\frac{1}{x+1}\in(0,1)$

若 $f(x)-kx=0$ 在 $x>0$ 时有一个零点, 则 $k\in(0,1)$,

综上可得 $k\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,

故选: B.

【点睛】

本题考查了函数图像的画法, 函数零点定义及应用, 根据零点个数求参数的取值范围, 导数的几何意义应用, 属于中档题.

2、 A

【解析】

根据指数函数的单调性, 可得 $a=5^{\frac{1}{5}}>1$, 再利用对数函数的单调性, 将 b, c 与 $1, \frac{1}{2}$ 对比, 即可求出结论.

【详解】

由题知 $a=5^{\frac{1}{5}}>5^0=1, 1>b=\log_4\sqrt{5}>\log_4 2=\frac{1}{2}$,

$c=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$, 则 $a>b>c$.

故选:A.

【点睛】

本题考查利用函数性质比较大小, 注意与特殊数的对比, 属于基础题..

3、 B

【解析】

列出循环的每一步, 进而可求得输出的 n 值.

【详解】

根据程序框图, 执行循环前: $a=0$, $b=0$, $n=0$,

执行第一次循环时: $a=1$, $b=2$, 所以: $9^2+8^2\leq 40$ 不成立.

继续进行循环, ...,

当 $a=4$, $b=8$ 时, $6^2+2^2=40$ 成立, $n=1$,

由于 $a \geq 5$ 不成立, 执行下一次循环,

$a=5$, $b=10$, $5^2+0^2 \leq 40$ 成立, $n=2$, $a \geq 5$ 成立, 输出的 n 的值为 2.

故选: B.

【点睛】

本题考查的知识要点: 程序框图的循环结构和条件结构的应用, 主要考查学生的运算能力和转换能力, 属于基础题型.

4、A

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项, 即得 a_4 的值.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

由 $3a_4 - 10a_3 + 3a_2 = 0$, 得 $3q^2 - 10q + 3 = 0$, 解得 $q=3$ 或 $q=\frac{1}{3}$.

因为 $S_4 > 0$ 且数列 $\{a_n\}$ 递增, 所以 $q=3$.

又 $S_4 = \frac{a_1(1-3^4)}{1-3} = \frac{40}{3}$, 解得 $a_1 = \frac{1}{3}$,

故 $a_4 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$.

故选: A

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5、C

【解析】

①: 由抛物线的定义可知 $|AF| = a+1 = 5$, 从而可求 A 的坐标; ②: 做 A 关于准线 $x=-1$ 的对称点为 A' , 通过分析可知当 A', P, O 三点共线时 $|PA| + |PO|$ 取最小值, 由两点间的距离公式, 可求此时最小值 $|A'O|$; ③: 设出直线 l 方程, 联立直线与抛物线方程, 结合韦达定理, 可知焦点坐标的关系, 进而可求 $k_{MB} + k_{MC} = 0$, 从而可判断出 $\angle OMB, \angle OMC$ 的关系; ④: 计算直线 OD, OB 的斜率之差, 可得两直线斜率相等, 进而可判断三点 B, O, D 在同一条直线上.

【详解】

解：对于①，设 $A(a, b)$ ，由抛物线的方程得 $F(1, 0)$ ，则 $|AF| = a + 1 = 5$ ，故 $a = 4$ ，

所以 $A(4, 4)$ 或 $(4, -4)$ ，所以满足条件的点 A 有二个，故①不正确；

对于②，不妨设 $A(4, 4)$ ，则 A 关于准线 $x = -1$ 的对称点为 $A'(-6, 4)$ ，

故 $|PA| + |OP| = |PA'| + |OP| \geq |A'O| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ ，

当且仅当 A', P, O 三点共线时等号成立，故②正确；

对于③，由题意知， $M(-1, 0)$ ，且 l 的斜率不为 0，则设 l 方程为： $x = my + 1 (m \neq 0)$ ，

设 l 与抛物线的交点坐标为 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ，联立直线与抛物线的方程为，

$$\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{整理得 } y^2 - 4my - 4 = 0, \text{则 } y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4, \text{所以}$$

$$x_1 + x_2 = 4m^2 + 2, x_1 x_2 = (my_1 + 1)(my_2 + 1) = -4m^2 + 4m^2 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{则 } k_{MB} + k_{MC} &= \frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} = \frac{y_1(x_2 + 1) + y_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{2y_1 + 2y_2 + 2my_1 y_2}{x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1} \\ &= \frac{2 \times 4m - 2m \times 4}{4m^2 + 2 + 1 + 1} = 0. \text{故 } MB, MC \text{ 的倾斜角互补, 所以 } \angle OMB = \angle OMC, \text{故③正确.} \end{aligned}$$

对于④，由题意知 $D(-1, y_2)$ ，由③知， $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$

$$\text{则 } k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{4}{y_1}, k_{OD} = -y_2, \text{由 } k_{OB} - k_{OD} = \frac{4}{y_1} + y_2 = \frac{4 + y_1 y_2}{y_1} = 0,$$

知 $k_{OB} = k_{OD}$ ，即三点 B, O, D 在同一条直线上，故④正确。

故选:C.

【点睛】

本题考查了抛物线的定义，考查了直线与抛物线的位置关系，考查了抛物线的性质，考查了直线方程，考查了两点的斜率公式. 本题的难点在于第二个命题，结合初中的“饮马问题”分析出何时取最小值。

6、A

【解析】

根据 $[x]$ 的定义先作出函数 $f(x)$ 的图象，利用函数与方程的关系转化为 $f(x)$ 与 $g(x) = ax$ 有三个不同的交点，利用数形结合进行求解即可。

【详解】

当 $0 \leq x < 1$ 时, $[x] = 0$,

当 $1 \leq x < 2$ 时, $[x] = 1$,

当 $2 \leq x < 3$ 时, $[x] = 2$,

当 $3 \leq x < 4$ 时, $[x] = 3$,

若 $f(x) - ax = 0$ 有且仅有 3 个零点,

则等价于 $f(x) = ax$ 有且仅有 3 个根,

即 $f(x)$ 与 $g(x) = ax$ 有三个不同的交点,

作出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象如图,

当 $a=1$ 时, $g(x) = x$ 与 $f(x)$ 有无数多个交点,

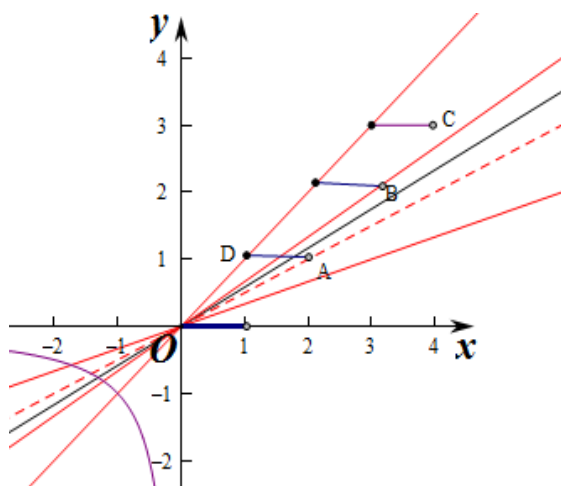
当直线 $g(x)$ 经过点 $A(2,1)$ 时, 即 $g(2) = 2a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有两个交点,

当直线 $g(x)$ 经过点 $B(3,2)$ 时, 即 $g(3) = 3a = 2$, $a = \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 有三个交点,

要使 $f(x)$ 与 $g(x) = ax$ 有三个不同的交点, 则直线 $g(x)$ 处在过 $y = \frac{1}{2}x$ 和 $y = \frac{2}{3}x$ 之间,

即 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$,

故选: A.



【点睛】

利用函数零点的情况求参数值或取值范围的方法

- (1)直接法: 直接根据题设条件构建关于参数的不等式, 再通过解不等式确定参数的范围;
- (2)分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数的值域(最值)问题加以解决;
- (3)数形结合法: 先对解析式变形, 在同一平面直角坐标系中, 画出函数的图象, 然后数形结合求解.

7、A

【解析】

构造函数 $g(x) = f(x) - 1$ ，通过分析 $g(x)$ 的单调性和对称性，求得不等式 $f(x) + f(3 - 2x) \leq 2$ 的解集。

【详解】

构造函数 $g(x) = f(x) - 1 = e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} + (x-1)$ ，

$g(x)$ 是单调递增函数，且向左移动一个单位得到 $h(x) = g(x+1) = e^x - \frac{1}{e^x} + x$ ，

$h(x)$ 的定义域为 R ，且 $h(-x) = \frac{1}{e^x} - e^x - x = -h(x)$ ，

所以 $h(x)$ 为奇函数，图像关于原点对称，所以 $g(x)$ 图像关于 $(1, 0)$ 对称。

不等式 $f(x) + f(3 - 2x) \leq 2$ 等价于 $f(x) - 1 + f(3 - 2x) - 1 \leq 0$ ，

等价于 $g(x) + g(3 - 2x) \leq 0$ ，注意到 $g(1) = 0$ ，

结合 $g(x)$ 图像关于 $(1, 0)$ 对称和 $g(x)$ 单调递增可知 $x + 3 - 2x \leq 2 \Rightarrow x \geq 1$ 。

所以不等式 $f(x) + f(3 - 2x) \leq 2$ 的解集是 $[1, +\infty)$ 。

故选：A

【点睛】

本小题主要考查根据函数的单调性和对称性解不等式，属于中档题。

8、B

【解析】

由频率分布直方图求出在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的频率即可得到车辆数，同时利用频率分布直方图能求行驶速度超过 90 km/h 的频率。

【详解】

由频率分布直方图得：

在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的频率为 $0.06 \times 5 = 0.3$ ，

$\therefore$ 在此路段上汽车行驶速度在区间 $[85, 90)$ 的车辆数为： $0.3 \times 1000 = 300$ ，

行驶速度超过 90 km/h 的频率为： $(0.05 + 0.02) \times 5 = 0.35$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查频数、频率的求法，考查频率分布直方图的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/847035136044006142>