宁夏银川市宁夏大学附属中学 2023-2024 学年高考全国统考预测密卷数学试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 **F**,抛物线 **C** 与圆 $C':x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$ 交于 **M,N** 两点,若 $|MN|=\sqrt{6}$,则 $\triangle MNF$ 的面积为(　　)

A．$\frac{\sqrt{2}}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　　D．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

2．设 $a=0.82^{0.5}$ ， $b=\sin 1$ ， $c=\lg 3$ ，则 a ， b ， c 三数的大小关系是

A．$a<c<b$　　B．$a<b<c$

C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

3．设集合 $A=\{x\,|\,x>0\}$ ， $B=\left\{x\,|\,\log_2(3x-1)<2\right\}$ ，则（　　）.

A．$A\cap B=\left(0,\frac{5}{3}\right)$　　B．$A\cap B=\left(0,\frac{1}{3}\right]$

C．$A\cup B=\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D．$A\cup B=(0,+\infty)$

4．已知菱形 $ABCD$ 的边长为 **2**， $\angle ABC=60°$ ，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$（）

A．**4**　　B．**6**　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

5．抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 的准线与 x 轴的交点为点 C ，过点 C 作直线 l 与抛物线交于 A 、 B 两点，使得 A 是 BC 的中点，则直线 l 的斜率为（　　）

A．$\pm\frac{1}{3}$　　B．$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．± 1　　D．$\pm\sqrt{3}$

6．已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，过 F_1 的直线与双曲线的两支分别交于 A,B 两点（**A** 在右支，**B** 在左支）若 ΔABF_2 为等边三角形，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{7}$

7．已知复数$z_1=1+ai\left(a\in R\right)$，$z_2=1+2i$（i为虚数单位），若$\dfrac{z_1}{z_2}$为纯虚数，则$a=$（　　）

A． -2　　　　**B．2**　　　　**C．** $-\dfrac{1}{2}$　　　　**D．** $\dfrac{1}{2}$

8．要得到函数$y=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$的图像，只需把函数$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$的图像（　　）

A． 向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位　　　　**B．** 向左平移$\dfrac{7\pi}{12}$个单位

C． 向右平移$\dfrac{\pi}{12}$个单位　　　　**D．** 向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位

9．已知集合$M=\{1,2,3,\cdots,n\}$（$n\in N^*$），若集合$A=\{a_1,a_2\}\subseteq M$，且对任意的$b\in M$，存在$\lambda,\mu\in\{-1,0,1\}$使得$b=\lambda a_i+\mu a_j$，其中$a_i,a_j\in A$，$1\le i\le j\le 2$，则称集合A为集合M的基底.下列集合中能作为集合$M=\{1,2,3,4,5,6\}$的基底的是（　　）

A． $\{1,5\}$　　　　**B．** $\{3,5\}$　　　　**C．** $\{2,3\}$　　　　**D．** $\{2,4\}$

10．已知实数集**R**，集合$A=\{x\,|\,1<x<3\}$，集合$B=\left\{x\,|\,y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right\}$，则$A\cap\left(C_RB\right)=$（　　）

A． $\{x\,|\,1<x\le 2\}$　　　　**B．** $\{x\,|\,1<x<3\}$　　　　**C．** $\{x\,|\,2\le x<3\}$　　　　**D．** $\{x\,|\,1<x<2\}$

11．已知复数$z=\dfrac{2i}{i-1}$，则z的虚部为（　　）

A．－1　　　　**B．** $-i$　　　　**C．1**　　　　**D．** i

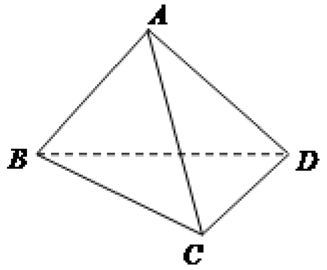
12．在等腰直角三角形ABC中，$\angle C=\dfrac{\pi}{2},CA=2\sqrt{2}$，$D$为$AB$的中点，将它沿$CD$翻折，使点$A$与点$B$间的距离为$2\sqrt{3}$，此时四面体$ABCD$的外接球的表面积为（　　）.

A． 5π　　　　**B．** $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi$　　　　**C．** 12π　　　　**D．** 20π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．若$a=\log_2 3,b=\log_3 2$,则$ab=$______,$\lg a+\lg b=$______.

14．如图，四面体$ABCD$的一条棱长为x，其余棱长均为1，记四面体$ABCD$的体积为$F(x)$，则函数$F(x)$的单调增区间是____；最大值为____.

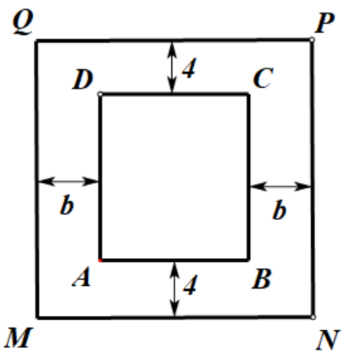


15．已知实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 3 \\ y\leq 3x-1 \\ x\leq 2 \end{cases}$，则 $z=\dfrac{y}{x}$ 的最小值为______.

16．已知 $m>0$，若 $(1+mx)^5$ 的展开式中 x^2 的系数比 **x** 的系数大 **30**，则 $m=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）一酒企为扩大生产规模，决定新建一个底面为长方形 $MNPQ$ 的室内发酵馆，发酵馆内有一个无盖长方体发酵池，其底面为长方形 $ABCD$ (如图所示)，其中 $AD\geq AB$.结合现有的生产规模，设定修建的发酵池容积为 **450** 米 ^{3}，深 **2** 米.若池底和池壁每平方米的造价分别为 **200** 元和 **150** 元，发酵池造价总费用不超过 **65400** 元



（**1**）求发酵池 AD 边长的范围；

（**2**）在建发酵馆时，发酵池的四周要分别留出两条宽为 **4** 米和 b 米的走道（b 为常数）.问:发酵池的边长如何设计，可使得发酵馆占地面积最小.

18．（12 分）已知向量 $\vec{a}=\left(2\sin x,-\sqrt{3}\right),\vec{b}=\left(\cos x,2\cos^2 x-1\right)$， $f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

（**1**）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

（**2**）若 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a=\sqrt{3},b=1,\ f\left(A\right)=\sqrt{3}$，求 ΔABC 的面积.

19．（12 分）设数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，$T_n=na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n$，已知 $T_1=1,T_2=4$，**(1)**求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项和公比；（**2**）求数列 $\left\{T_n\right\}$ 的通项公式.

20．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+\dfrac{b}{x}$（$a$，$b\in R$），且对任意 $x>0$，都有 $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

（Ⅰ）用含a的表达式表示b；

（Ⅱ）若$f\left(x\right)$存在两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，求出a的取值范围，并证明$f\left(\dfrac{a^2}{2}\right)>0$；

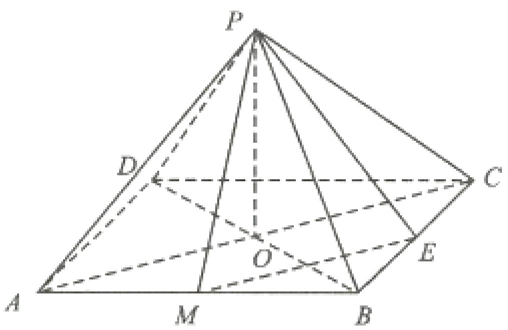
（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，判断$y=f\left(x\right)$零点的个数，并说明理由.

21.（12分）已知函数$f\left(x\right)=x^2-\left(a+2\right)x+a\ln x$（$a$为实常数）.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的单调性；

（2）若存在$x\in\left[1,e\right]$，使得$f\left(x\right)\le 0$成立，求实数a的取值范围.

22.（10分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，O是边长为4的正方形$ABCD$的中心，$PO\perp$平面$ABCD$，E为BC的中点.



（Ⅰ）求证：平面$PAC\perp$平面PBD；

（Ⅱ）若$PE=3$，求二面角$D-PE-B$的余弦值.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由圆C'过原点，知M,N中有一点M与原点重合，作出图形，由$\left|C'M\right|=\left|C'N\right|=\sqrt{3}$，$\left|MN\right|=\sqrt{6}$，得$C'M\perp C'N$，从而直线$MN$倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$，写出$N$点坐标，代入抛物线方程求出参数$p$，可得$F$点坐标，从而得三角形面积.

【详解】

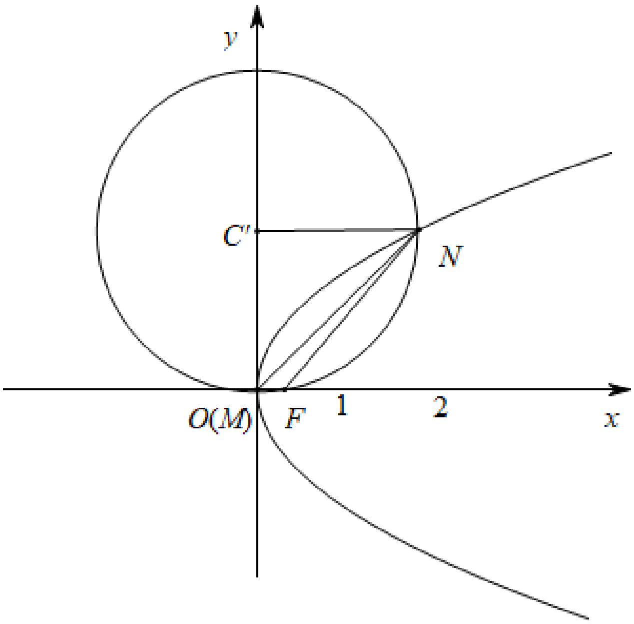
由题意圆 C' 过原点，所以原点是圆与抛物线的一个交点，不妨设为 M，如图，

由于 $|C'M|=|C'N|=\sqrt{3}$，$|MN|=\sqrt{6}$，$\therefore C'M\perp C'N$，$\therefore \angle C'MN=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle NOx=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore$点 N 坐标为 $(\sqrt{3},\sqrt{3})$，代入抛物线方程得 $(\sqrt{3})^2=2p\times\sqrt{3}$，$p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore F(\dfrac{\sqrt{3}}{4},0)$，$S_{\Delta FMN}=\dfrac{1}{2}|MF|\times y_N=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{8}$.

故选：**B.**



【点睛】

本题考查抛物线与圆相交问题，解题关键是发现原点 O 是其中一个交点，从而 $\Delta MNC'$ 是等腰直角三角形，于是可得 N 点坐标，问题可解，如果仅从方程组角度研究两曲线交点，恐怕难度会大大增加，甚至没法求解.

2、**C**

【解析】

利用对数函数，指数函数以及正弦函数的性质和计算公式，将 ***a***，***b***，***c*** 与 $\sqrt{\dfrac{4}{5}}$，$\dfrac{1}{2}$ 比较即可.

【详解】

由 $a=0.82^{0.5}>0.8^{0.5}=\sqrt{\dfrac{4}{5}}$，

$\dfrac{1}{2}<b=\sin 1<\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}<\sqrt{\dfrac{4}{5}}$，

$c=\lg 3<\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}\lg 10=\frac{1}{2}$，

所以有 $c<b<a$.选 **C.**

【点睛】

本题考查对数值，指数值和正弦值大小的比较，是基础题，解题时选择合适的中间值比较是关键，注意合理地进行等价转化.

3、**D**

【解析】

根据题意，求出集合 A，进而求出集合 $A\cup B$ 和 $A\cap B$，分析选项即可得到答案.

【详解】

根据题意，$B=\{x\,|\,\log_2(3x-1)<2\}=\left\{x\,|\,\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}\right\}$

则 $A\cup B=(0,+\infty),A\cap B=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

故选：**D**

【点睛】

此题考查集合的交并集运算，属于简单题目，

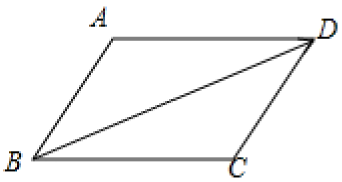
4、**B**

【解析】

根据菱形中的边角关系，利用余弦定理和数量积公式，即可求出结果.

【详解】

如图所示，



菱形形 $ABCD$ 的边长为 **2**，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore\angle C=120^\circ$，$\therefore BD^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ=12$，

$\therefore BD=2\sqrt{3}$，且 $\angle BDC=30^\circ$，

$\therefore\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{BD}|\times|\overrightarrow{CD}|\times cos30^\circ=2\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$，

故选 **B.**

【点睛】

本题主要考查了平面向量的数量积和余弦定理的应用问题，属于基础题..

5、B

【解析】

设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，设直线 AB 的方程为 $x=my-\dfrac{p}{2}$，由题意得出 $y_1=\dfrac{y_2}{2}$，将直线 l 的方程与抛物线的方程联立，列出韦达定理，结合 $y_1=\dfrac{y_2}{2}$ 可求得 m 的值，由此可得出直线 l 的斜率.

【详解】

由题意可知点 $C\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，设直线 AB 的方程为 $x=my-\dfrac{p}{2}$，

由于点 A 是 BC 的中点，则 $y_1=\dfrac{y_2}{2}$，

将直线 l 的方程与抛物线的方程联立得 $\begin{cases}x=my-\dfrac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}$，整理得 $y^2-2mpy+p^2=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=3y_1=2mp$，得 $y_1=\dfrac{2mp}{3}$，$y_1y_2=2y_1^2=\dfrac{8m^2p^2}{9}=p^2$，解得 $m=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

因此，直线 l 的斜率为 $\dfrac{1}{m}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查直线斜率的求解，考查直线与抛物线的综合问题，涉及韦达定理设而不求法的应用，考查运算求解能力，属于中等题.

6、D

【解析】

根据双曲线的定义可得 ΔABF_2 的边长为 $4a$，然后在 ΔAF_1F_2 中应用余弦定理得 a,c 的等式，从而求得离心率.

【详解】

由题意 $\left|AF_1\right|-\left|AF_2\right|=2a$，$\left|BF_2\right|-\left|BF_1\right|=2a$，又 $\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|=\left|AB\right|$，

$\therefore\left|AF_1\right|-\left|BF_1\right|=\left|AB\right|=4a$，$\therefore\left|BF_1\right|=2a$，

在 ΔAF_1F_2 中 $\left|F_1F_2\right|^2=\left|AF_1\right|^2+\left|AF_2\right|^2-2\left|AF_1\right|\left|AF_2\right|\cos 60^\circ$，

即 $4c^2=(6a)^2+(4a)^2-2\times6a\times4a\times\frac{1}{2}=28a^2$，∴.

故选：**D**.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，解题关键是应用双曲线的定义把 A 到两焦点距离用 a 表示，然后用余弦定理建立关系式.

7、**C**

【解析】

把 $z_1=1+ai\left(a\in R\right)$，$z_2=1+2i$ 代入 $\frac{z_1}{z_2}$，利用复数代数形式的除法运算化简，由实部为 **0** 且虚部不为 **0** 求解即可.

【详解】

$\because z_1=1+ai\left(a\in R\right)$，$z_2=1+2i$，

$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+ai}{1+2i}=\frac{(1+ai)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1+2a}{5}+\frac{a-2}{5}i$，

$\because \frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，

$\therefore \begin{cases}1+2a=0\\ a-2\neq0\end{cases}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

故选 **C**.

【点睛】

本题考查复数代数形式的除法运算，考查复数的基本概念，是基础题.

8、**A**

【解析】

运用辅助角公式将两个函数公式进行变形得 $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 以及 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,按四个选项分别对 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 变形，整理后与 $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 对比，从而可选出正确答案.

【详解】

解：

$$y=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

对于 **A**：可得 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

故选:**A.**

【点睛】

本题考查了三角函数图像平移变换，考查了辅助角公式.本题的易错点有两个，一个是混淆了已知函数和目标函数;二是在平移时，忘记乘了自变量前的系数.

9、**C**

【解析】

根据题目中的基底定义求解.

【详解】

因为$1=-1\times 2+1\times 3$，

$2=1\times 2+0\times 3$，

$3=0\times 2+1\times 3$，

$4=1\times 2+1\times 2$，

$5=1\times 2+1\times 3$，

$6=1\times 3+1\times 3$，

所以$\{2,3\}$能作为集合$M=\{1,2,3,4,5,6\}$的基底，

故选：**C**

【点睛】

本题主要考查集合的新定义，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

10、**A**

【解析】

$\sqrt{x-2}>0$可得集合B,求出补集C_RB,再求出$\mathrm{A}\cap\left(\mathrm{C_R B}\right)$即可.

【详解】

由$\sqrt{x-2}>0$,得$x>2$,即$B=(2,+\infty)$,

所以$C_RB=(-\infty,2]$,