

2024 届云南省昆明一中高三全真数学试题模拟试卷(6)

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答;第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后,考生须将试卷和答题卡放在桌面上,待监考员收回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2, x^3 的系数之和为 -10 , 则实数 a 的值为 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , 若 $8a_{2019} + a_{2016} = 0$, 则 $\frac{S_6}{S_3}$ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{9}{8}$

3. 四人并排坐在连号的四个座位上, 其中 A 与 B 不相邻的所有不同的坐法种数是 ()

- A. 12 B. 16 C. 20 D. 8

4. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ 2x-y+4 \geq 0 \\ 4x+y-4 \leq 0 \end{cases}$, 则 $|3x+4y|$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5. 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过原点 O 作斜率为 $\frac{4}{3}$ 的直线交 C 的右支于点 A , 若 $|OA| = |OF|$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. $\sqrt{3} + 1$

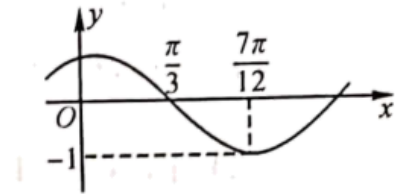
7. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 抛物线上任意一点 P , 且 $PQ \perp y$ 轴交 y 轴于点 Q , 则 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

8. 费马素数是法国大数学家费马命名的, 形如 $2^{2^n} + 1 (n \in \mathbb{N})$ 的素数(如: $2^{2^0} + 1 = 3$) 为费马素数, 在不超过 30 的正偶数中随机选取一数, 则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是 ()

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{1}{3}$

9. $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象如图所示, $g(x) = -A \sin(\omega x - \varphi)$, 若将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 a ($a > 0$) 个单位长度后所得图象与 $y = g(x)$ 的图象重合, 则 a 可取的值为 ()

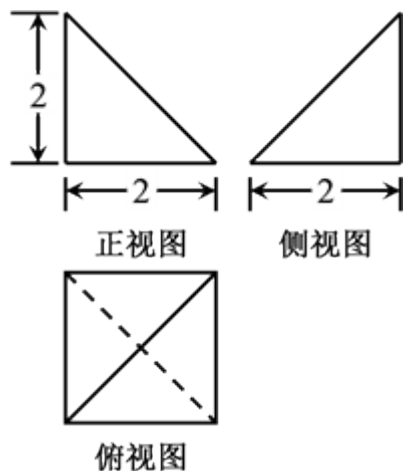


- A. $\frac{1}{12}\pi$ B. $\frac{5}{12}\pi$ C. $\frac{7}{12}\pi$ D. $\frac{11}{12}\pi$

10. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, 点 $A(1, m)$ 在 C 上, 若直线 AF 与 C 的另一个交点为 B , 则 $|AB| =$ ()

- A. 12 B. 10 C. 9 D. 8

11. 某几何体的三视图如图所示, 则此几何体的体积为 ()



- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

12. 设不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-\sqrt{3}y \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω , 若从圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的内部随机选取一点 P , 则 P 取自 Ω 的概率为 ()

- A. $\frac{5}{24}$ B. $\frac{7}{24}$ C. $\frac{11}{24}$ D. $\frac{17}{24}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若一组样本数据 7, 9, x , 8, 10 的平均数为 9, 则该组样本数据的方差为_____.

14. 已知直线 $x - y + a = 0$ 与圆心为 C 的圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 相交于 A, B 两点, 且 $AC \perp BC$, 则实数 a 的值为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \cos C = b \cos C + c \cos B$, 则 $C =$ _____.

16. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB = 1, AD = 2, \angle BAD = 60^\circ$, 若 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边分别是 a, b, c , 其中 $a = 2, c = \sqrt{3}$.

- (1) 若角 A 为锐角, 且 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\sin B$ 的值;
- (2) 设 $f(C) = \sqrt{3} \sin C \cos C + 3 \cos^2 C$, 求 $f(C)$ 的取值范围.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $(\sin A + \sin B)(a - b) = c(\sin C - \sin B)$, $a = 2\sqrt{7}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$.

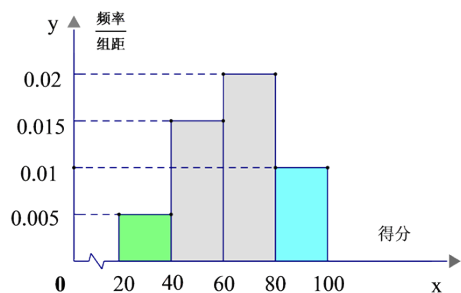
- (1)求 A ;
- (2)求 $\triangle ABC$ 的周长 .

19. (12 分) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\tan A, \tan B, \tan C$ 成等差数列, $\cos A, \sqrt{\cos C}, \cos B$ 成等比数列.

- (1) 求 A 的值;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为1, 求 c 的值.

20. (12 分) 某校为了解校园安全教育系列活动的成效, 对全校学生进行一次安全意识测试, 根据测试成绩评定“合格”、“不合格”两个等级, 同时对相应等级进行量化: “合格”记 5 分, “不合格”记 0 分.现随机抽取部分学生的成绩, 统计结果及对应的频率分布直方图如下所示:

等级	不合格		合格	
得分	$[20, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 100)$
频数	6	x	24	y



(I) 若测试的同学中, 分数段 $[20,40)$ 、 $[40,60)$ 、 $[60,80)$ 、 $[80,100]$ 内女生的人数分别为2人、8人、16人、4人, 完成 2×2 列联表, 并判断: 是否有90%以上的把握认为性别与安全意识有关?

是否合格	不合格	合格	总计
性别			
男生			
女生			
总计			

(II) 用分层抽样的方法, 从评定等级为“合格”和“不合格”的学生中, 共选取10人进行座谈, 现再从这10人中任选4人, 记所选4人的量化总分为 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$;

(III) 某评估机构以指标 M ($M = \frac{E(X)}{D(X)}$, 其中 $D(X)$ 表示 X 的方差) 来评估该校安全教育活动的成效, 若 $M \geq 0.7$, 则认定教育活动是有效的; 否则认定教育活动无效, 应调整安全教育方案. 在 (II) 的条件下, 判断该校是否应调整安全教育方案?

附表及公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

21. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, A 、 B 、 C 的对应边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $a=2$, $c=2\sqrt{3}$, $\cos C = -\frac{1}{2}$.
- (1) 求 A ;
- (2) 设 M 为 BC 中点, 求 AM 的长.

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆 C 的长轴长为 4.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 是否存在实数 k 使得以线段 AB 为直径的圆恰好经过坐标原点 O ? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

由 $(1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5$, 进而分别求出展开式中 x^2 的系数及展开式中 x^3 的系数, 令二者之和等于 -10 , 可求出实数 a 的值.

【详解】

由 $(1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5$,

则展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + aC_5^1 = 10 + 5a$, 展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 + aC_5^2 = 10 + 10a$,

二者的系数之和为 $(10 + 5a) + (10a + 10) = 15a + 20 = -10$, 得 $a = -2$.

故选: B.

【点睛】

本题考查二项式定理的应用, 考查学生的计算求解能力, 属于基础题.

2、C

【解析】

求得等比数列 $\{a_n\}$ 的公比, 然后利用等比数列的求和公式可求得 $\frac{S_6}{S_3}$ 的值.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $8a_{2019} + a_{2016} = 0$, $\therefore q^3 = \frac{a_{2019}}{a_{2016}} = -\frac{1}{8}$, $\therefore q = -\frac{1}{2}$,

因此, $\frac{S_6}{S_3} = \frac{1-q^6}{1-q^3} = 1+q^3 = \frac{7}{8}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查等比数列求和公式的应用, 解答的关键就是求出等比数列的公比, 考查计算能力, 属于基础题.

3、A

【解析】

先将除 A, B 以外的两人先排, 再将 A, B 在 3 个空位置里进行插空, 再相乘得答案.

【详解】

先将除 A, B 以外的两人先排, 有 $A_2^2 = 2$ 种; 再将 A, B 在 3 个空位置里进行插空, 有 $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$ 种, 所以共有 $2 \times 6 = 12$ 种.

故选: A

【点睛】

本题考查排列中不相邻问题, 常用插空法, 属于基础题.

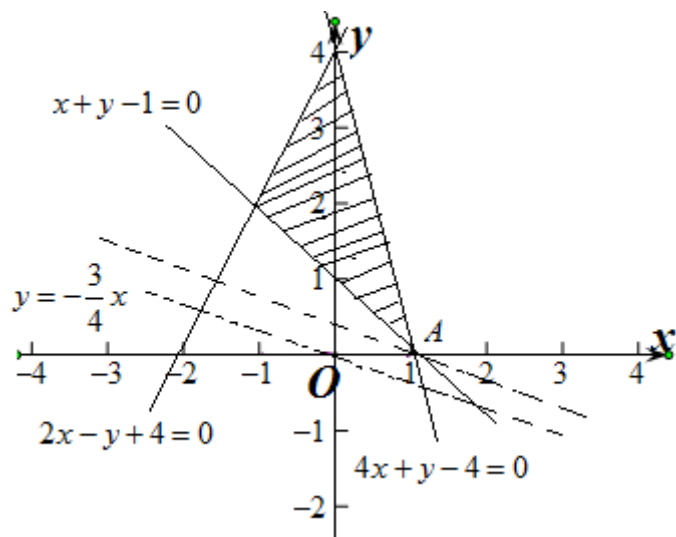
4、B

【解析】

作出约束条件的可行域, 在可行域内求 $z = 3x + 4y$ 的最小值即为 $|3x + 4y|$ 的最小值, 作 $y = -\frac{3}{4}x$, 平移直线即可求解.

【详解】

作出实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ 2x-y+4 \geq 0 \\ 4x+y-4 \leq 0 \end{cases}$ 的可行域, 如图 (阴影部分)



令 $z = 3x + 4y$ ，则 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{z}{4}$ ，

作出 $y = -\frac{3}{4}x$ ，平移直线，当直线经过点 $A(1, 0)$ 时，截距最小，

故 $z_{\min} = 3 \times 1 + 0 = 3$ ，

即 $|3x + 4y|$ 的最小值为 3.

故选：B

【点睛】

本题考查了简单的线性规划问题，解题的关键是作出可行域、理解目标函数的意义，属于基础题.

5、C

【解析】

将圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ ，化为标准方程为，求得圆心为 $(2, -1)$. 根据圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线

$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称，则圆心在渐近线上， $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. 再根据 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

【详解】

已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ ，

所以其标准方程为： $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ ，

所以圆心为 $(2, -1)$.

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

所以其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

又因为圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称，

则圆心在渐近线上，

所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查圆的方程及对称性，还有双曲线的几何性质，还考查了运算求解的能力，属于中档题。

6、B

【解析】

以 O 为圆心，以 $|OF|$ 为半径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = c^2$ ，联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ ，可求出点 $A\left(\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$ ，则

$$\frac{\frac{b^2}{c}}{\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}} = \frac{4}{3}，整理计算可得离心率。$$

【详解】

解：以 O 为圆心，以 $|OF|$ 为半径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = c^2$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}，取第一象限的解得 \begin{cases} x = \frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c} \\ y = \frac{b^2}{c} \end{cases}，$$

$$\text{即} A\left(\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}, \frac{b^2}{c}\right)，则 \frac{\frac{b^2}{c}}{\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}} = \frac{4}{3}，$$

$$\text{整理得} (9c^2 - 5a^2)(c^2 - 5a^2) = 0，$$

$$\text{则} \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9} < 1 \text{ (舍去)}，\frac{c^2}{a^2} = 5，$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}。$$

故选：B.

【点睛】

本题考查双曲线离心率的求解，考查学生的计算能力，是中档题。

7、A

【解析】

设点 $P\left(\frac{y^2}{4}, y\right)$ ，则点 $Q(0, y)$ ， $F(1, 0)$ ，利用向量数量积的坐标运算可得 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF} = \frac{1}{16}(y^2 - 2)^2 - \frac{1}{4}$ ，利用二次函数的性质可得最值。

【详解】

解：设点 $P\left(\frac{y^2}{4}, y\right)$ ，则点 $Q(0, y)$ ， $F(1, 0)$ ，

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{y^2}{4}, 0\right), \overrightarrow{PF} = \left(1 - \frac{y^2}{4}, -y\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF} = \left(-\frac{y^2}{4}, 0\right) \cdot \left(1 - \frac{y^2}{4}, -y\right) = \frac{y^4}{16} - \frac{y^2}{4} = \frac{1}{16}(y^2 - 2)^2 - \frac{1}{4},$$

当 $y^2 = 2$ 时， $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PF}$ 取最小值，最小值为 $-\frac{1}{4}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查抛物线背景下的向量的坐标运算，考查学生的计算能力，是基础题。

8、B

【解析】

基本事件总数 $n = 15$ ，能表示为两个不同费马素数的和只有 $8 = 3 + 5$ ， $20 = 3 + 17$ ， $22 = 5 + 17$ ，共有 3 个，根据古典概型求出概率。

【详解】

在不超过 30 的正偶数中随机选取一数，基本事件总数 $n = 15$

能表示为两个不同费马素数的和的只有 $8 = 3 + 5$ ， $20 = 3 + 17$ ， $22 = 5 + 17$ ，共有 3 个

则它能表示为两个不同费马素数的和的概率是 $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查概率的求法，考查列举法解决古典概型问题，是基础题。

9、B

【解析】

根据图象求得函数 $y = f(x)$ 的解析式，即可得出函数 $y = g(x)$ 的解析式，然后求出变换后的函数解析式，结合题意可得出关于 a 的等式，即可得出结果。

【详解】

由图象可得 $A = 1$ ，函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $T = 4 \times \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$ ， $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

$$\text{Q } f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{则 } \frac{7\pi}{6} + \varphi = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \therefore \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ 取 } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 则 } g(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\therefore g(x) = f(x+a) = \cos\left(2x + 2a - \frac{\pi}{6}\right), \quad 2a - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ 可得 } a = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } a = \frac{5\pi}{12}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查利用图象求函数解析式, 同时也考查了利用函数图象变换求参数, 考查计算能力, 属于中等题.

10、C

【解析】

求得 A 点坐标, 由此求得直线 AF 的方程, 联立直线 AF 的方程和抛物线的方程, 求得 B 点坐标, 进而求得 $|AB|$

【详解】

抛物线焦点为 $F(2, 0)$, 令 $x=1$, $y^2=8$, 解得 $y=\pm 2\sqrt{2}$, 不妨设 $A(1, 2\sqrt{2})$, 则直线 AF 的方程为

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{1-2}(x-2) = -2\sqrt{2}(x-2), \text{ 由 } \begin{cases} y = -2\sqrt{2}(x-2) \\ y^2 = 8x \end{cases}, \text{ 解得 } A(1, 2\sqrt{2}), B(4, -4\sqrt{2}), \text{ 所以}$$

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2} = 9.$$

故选: C

【点睛】

本小题主要考查抛物线的弦长的求法, 属于基础题.

11、C

【解析】

该几何体为三棱锥, 其直观图如图所示, 体积 $V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) \times 2 = \frac{4}{3}$. 故选 C.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/847065013044006142>