

6.3 平面向量基本定理及坐标表示（精讲）

思维导图

平面向量基本定理及坐标运算

基本定理

定理

如果 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$

基底

不共线的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

坐标运算

加法 减法 数乘

$$\text{设 } \vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$$

$$\text{则 } \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

向量坐标 的求法

若向量的起点是坐标原点，则终点坐标即为向量的坐标。

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

平面向量 共线的坐 标表示

设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，其中 $\vec{b} \neq 0$ ，则 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

(1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件不能表示为 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ ，因为 x_2, y_2 有可能为 0。

(2) 当且仅当 $x_2 y_2 \neq 0$ 时， $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 与 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ 等价。

即两个不平行于坐标轴的共线向量的对应坐标成比例。

数量积

已知两个非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ， θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，则

$$\textcircled{1} |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\textcircled{4} \cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

常用知识

已知 P 为线段 AB 的中点，若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 P 点坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

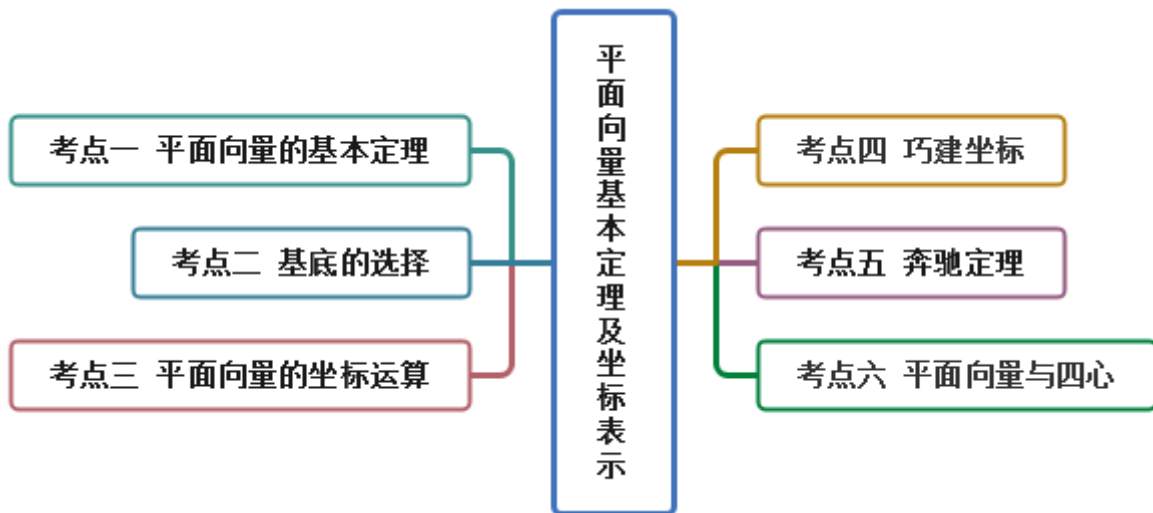
已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，

则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

线段 $P_1 P_2$ 的端点 P_1, P_2 的坐标分别是 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ， P 是直线 $P_1 P_2$ 上的一点，

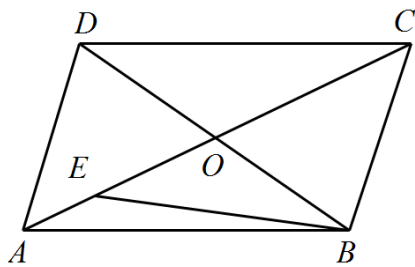
当 $\vec{P_1 P} = \lambda \vec{P P_2}$ ，求 P 点的坐标 $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$

典例精讲



考点一 平面向量的基本定理

【例 1-1】(2022·河南·平顶山市) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 且 $\vec{EO} = 2\vec{AE}$, 则 $\vec{EB} =$ ()

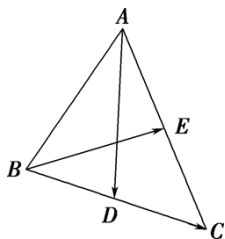


- A. $\frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{5}{6}\vec{AD}$ B. $\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AD}$ C. $\frac{5}{6}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AD}$ D. $\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AD}$

【答案】C

【解析】因为 $\vec{EO} = 2\vec{AE}$, 所以 $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AO} = \frac{1}{6}\vec{AC} = \frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AD})$,
 所以 $\vec{EB} = \vec{AB} - \vec{AE} = \vec{AB} - \frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{5}{6}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AD}$. 故选: C.

【例 1-2】(2022 广东) 已知 AD , BE 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC , AC 上的中线, 设 $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{BE} = \vec{b}$, 则 $\vec{BC}$ 等于 ()



A. $\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
C. $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$

B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$
D. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

【答案】B

【解析】由题意 $\vec{BE} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$ 所以 $2\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$, ①

同理得 $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = -\vec{BA} + (\vec{BC} - \vec{BA}) = -2\vec{BA} + \vec{BC}$ 即 $2\vec{AD} = -2\vec{BA} + \vec{BC}$. ②

①×2+②得 $4\vec{BE} + 2\vec{AD} = 3\vec{BC}$, 即 $4\vec{b} + 2\vec{a} = 3\vec{BC}$, 所以 $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. 故选: B.

【例 1-3】(2022·安徽宣城·高一期末) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 为 AC 上的点, 且 $\vec{AM} = 3\vec{MC}$, 若

$\vec{BM} = \lambda\vec{BA} + \mu\vec{BC}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda - \mu =$ ()

A. $-\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

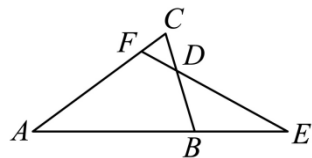
【答案】B

【解析】由题意可得 $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC} = \vec{BA} + \frac{3}{4}(\vec{BC} - \vec{BA}) = \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{BC}$,

又 $\vec{BM} = \lambda\vec{BA} + \mu\vec{BC}$, 故 $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{3}{4}$, 故 $\lambda - \mu = -\frac{1}{2}$, 故选: B

【例 1-4】(2022·辽宁·东北育才学校高一阶段练习) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD} = 3\vec{DC}$, $\vec{AE} = m\vec{AB}$,

$\vec{AF} = n\vec{AC}$, $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{3}{n} =$ ()



A. 3

B. 4

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】B

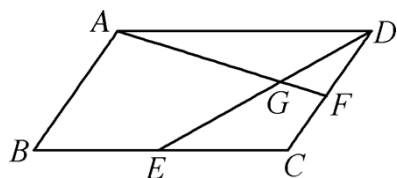
【解析】由题意得: $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{3}{4}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$,

又 $\vec{AE} = m\vec{AB}$, $\vec{AF} = n\vec{AC}$, $\therefore \vec{AD} = \frac{1}{4m}\vec{AE} + \frac{3}{4n}\vec{AF}$,

Q, E, D, F 三点共线, $\therefore \frac{1}{4m} + \frac{3}{4n} = 1$, 即 $\frac{1}{m} + \frac{3}{n} = 4$. 故选: B.

【一隅三反】

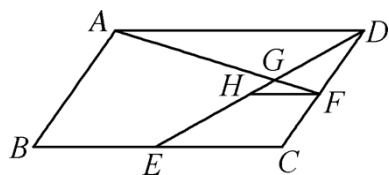
1. (2022·云南) 在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, DE 交 AF 于点 G , 则 $\vec{AG} =$ ()



- A. $\frac{2}{5}\vec{AB} - \frac{4}{5}\vec{BC}$ B. $\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{BC}$
C. $-\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{BC}$ D. $-\frac{2}{5}\vec{AB} - \vec{BC}$

【答案】B

【解析】如图,



过点 F 作 BC 的平行线交 DE 于 H ,

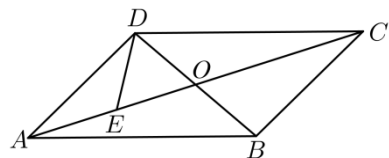
则 H 是 DE 的中点, 且 $HF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{4}BC$, $\therefore HF = \frac{1}{4}AD$,

又 $\triangle AGD \sim \triangle FGH$, 所以 $\frac{AG}{GF} = \frac{AD}{FH}$, 即 $FG = \frac{1}{4}AG$, 所以 $\vec{AG} = \frac{4}{5}\vec{AF}$,

又 $\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\therefore \vec{AG} = \frac{4}{5}\vec{AF} = \frac{4}{5}\left(\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{BC}$. 故选: B

2. (2022·内蒙古赤峰) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , E 为 AO 的中点, 若

$\vec{ED} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x - y$ 等于 ()



- A. 1 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】由题意知 $\vec{ED} = \vec{EA} + \vec{AD} = -\frac{1}{4}\vec{AC} + \vec{AD} = -\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AD} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$,

因为 $\vec{ED} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$ ($x, y \in \mathbf{R}$)，所以 $x = -\frac{1}{4}$ ， $y = \frac{3}{4}$ ， $x - y = -1$. 故选：B.

3. (2022·山东潍坊) 在平行四边形 $ABCD$ 中， M, N 分别是 AD, CD 的中点， $\vec{BM} = \vec{a}$ ， $\vec{BN} = \vec{b}$ ，则 $\vec{BD} =$

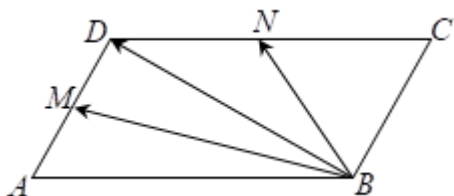
- ()
- A. $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ D. $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

【答案】B

【解析】如图所示，设 $\vec{AB} = \vec{m}$ ， $\vec{AD} = \vec{n}$ ，且 $\vec{BD} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，

则 $\vec{BD} = x\vec{a} + y\vec{b} = x \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{n} - \vec{m}\right) + y \cdot \left(\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{m}\right) = \left(\frac{1}{2}x + y\right)\vec{n} - \left(x - \frac{1}{2}y\right)\vec{m}$ ，

又因为 $\vec{BD} = \vec{n} - \vec{m}$ ，所以 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ ，解得 $x = \frac{2}{3}$ ， $y = \frac{2}{3}$ ，所以 $\vec{BD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. 故选：B.



考点二 基底的选择

【例 2】(2022·全国·高一课时练习) 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是平面上的两个不平行向量，下列向量不能作为一组基的是 ()

- A. $-\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ B. $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$
- C. $2\vec{a} - 5\vec{b}$ 与 $-4\vec{a} + 10\vec{b}$ D. $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$

【答案】C

【解析】对于 A，假设存在实数 λ ，使 $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(-\vec{a})$ ，则 $\begin{cases} 1 = -\lambda \\ 1 = 0 \end{cases}$ ，方程组无解，即不存在实数 λ ，使

$\vec{a} + \vec{b} = \lambda(-\vec{a})$ ，即 $-\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 不共线，A 不选；

对于 B，假设存在实数 λ ，使 $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(2\vec{a} + \vec{b})$ ，则 $\begin{cases} 1 = 2\lambda \\ 1 = \lambda \end{cases}$ ，方程组无解，即不存在实数 λ ，使

$\vec{a} + \vec{b} = \lambda(2\vec{a} + \vec{b})$ ，即 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} + \vec{b}$ 不共线，B 不选；

对于 C，假设存在实数 λ ，使 $2\vec{a} - 5\vec{b} = \lambda(-4\vec{a} + 10\vec{b})$ ，则 $\begin{cases} 2 = -4\lambda \\ -5 = 10\lambda \end{cases}$ ，解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$ ，即 $2\vec{a} - 5\vec{b}$ 与 $-4\vec{a} + 10\vec{b}$ 共

线，选 C；

对于 D，假设存在实数 λ ，使 $2\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} + 2\vec{b})$ ，则 $\begin{cases} 2 = \lambda \\ 1 = 2\lambda \end{cases}$ ，方程组无解，即不存在实数 λ ，使

$2\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} + 2\vec{b})$ ，即 $2\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 不共线，D 不选；故选：C

【一隅三反】

1. (2022·湖南) 设 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 是平面内的一个基底，则下面的四组向量不能作为基底的是 ()

A. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

B. $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

C. $\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1$

D. $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 和 $4\vec{e}_2 - 6\vec{e}_1$

【答案】D

【解析】 $\because \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内的一组基底， $\therefore \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线，而 $4\vec{e}_2 - 6\vec{e}_1 = -2(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)$ ，

则根据向量共线定理可得， $(4\vec{e}_2 - 6\vec{e}_1)$ 与 $(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)$ 共线，根据基底的定义可知，选项 D 不符合题意.

其他三组中的向量均为不共线向量，故可作为基底向量.

故选:D.

2. (2022·河南) 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内一组不共线的向量，则下列四组向量中，不能做基底的是 ()

A. $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

B. $2\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

C. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

D. $-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ 与 $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

【答案】D

【解析】A 选项：令 $\vec{e}_1 = \lambda(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ ，因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$ ，无实数解，所以 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 不共线，

故可以作为平面向量基底；

B 选项：令 $2\vec{e}_2 = \lambda(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ ，因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ ，无实数解，所以 $2\vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 不共线，故可

以作为平面向量基底；

C 选项：令 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \lambda(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ ，因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线，所以 $\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda = 1 \end{cases}$ ，无实数解，所以 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 不共线，

故可以作为平面向量基底；

D 选项: 易知 $-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = -(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)$, 即 $-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ 与 $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 共线, 不能作为平面向量基底.

故选: D

3. (2022·江苏省震泽中学高一期中) 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是平面内所有向量的一组基底, 则下列四组向量中, 不能作为基底的一组是 ()

A. $2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 和 $2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$

B. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

C. $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1$

D. $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $2\vec{e}_2 + \vec{e}_1$

【答案】A

【解析】对于 A 选项, 因为 $2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1 = -2(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$, 则 $2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 和 $2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_1$ 共线, A 选项不满足条件;

对于 B 选项, 设 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \lambda(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = \lambda\vec{e}_1 - 2\lambda\vec{e}_2$, 则 $\begin{cases} \lambda = 1 \\ -2\lambda = 1 \end{cases}$, 无解,

故 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 不共线, B 选项能作为基底;

同理可知 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1$ 不共线, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $2\vec{e}_2 + \vec{e}_1$ 也不共线, CD 选项均能作为基底. 故选: A.

考点三 平面向量的坐标表示

【例 3-1】(2022·北京·高一期末) 已知向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, $\vec{c} = (3, 0)$, 若 $\vec{a} // (\vec{b} + \vec{c})$, 则 $m =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. -2

【答案】B

【解析】因为 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, $\vec{c} = (3, 0)$, 所以 $\vec{b} + \vec{c} = (-1, 1) + (3, 0) = (2, 1)$, 又 $\vec{a} // (\vec{b} + \vec{c})$,

所以 $2m = 1 \times 1$, 解得 $m = \frac{1}{2}$. 故选: B

【例 3-2】(2022·江西) 向量 $\vec{PA} = (k, 12)$, $\vec{PB} = (4, 5)$, $\vec{PC} = (10, k)$. 若 A, B, C 三点共线, 则 k 的值为 ()

A. -2

B. 1

C. -2 或 11

D. 2 或 -11

【答案】C

【解析】由题可得: $\vec{BA} = \vec{PA} - \vec{PB} = (k, 12) - (4, 5) = (k - 4, 7)$,

$\vec{CA} = \vec{PA} - \vec{PC} = (k, 12) - (10, k) = (k - 10, 12 - k)$.

因为 A, B, C 三点共线, 所以 $\vec{BA} // \vec{CA}$, 所以 $(k - 4)(12 - k) - 7(k - 10) = 0$, 整理得 $k^2 - 9k - 22 = 0$, 解得

$k = -2$ 或 $k = 11$. 故选: C.

【例 3-3】(2022·江苏常州·高一期末) 设平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 12$, $\vec{b} = (2, \sqrt{5})$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$, 则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影向量的模为 ().

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. 3 D. 6

【答案】A

【解析】由题意可知: $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{1}{8} \vec{a}$,

故 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影向量的模为 $|\frac{1}{8} \vec{a}| = \frac{1}{8} \times 12 = \frac{3}{2}$, 故选: A

【例 3-4】(2022·安徽·合肥市第六中学高一期中) 与向量 $\vec{a} = (12, 5)$ 平行的单位向量是 ()

- A. $(6, \frac{5}{2})$ B. $(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$
C. $(6, \frac{5}{2})$ 或 $(-6, -\frac{5}{2})$ D. $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$ 或 $(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$

【答案】D

【解析】因为与向量 $\vec{a}$ 平行的单位向量是 $\pm \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, 所以 $\pm \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \pm (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$, 故选: D

【例 3-4】(2022·山东) (多选) 下列说法中正确的有 ()

- A. 已知 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2} \vec{b}$ 且 $|\vec{b}| = 5$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{25}{2}$;
B. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 夹角为锐角, 则 λ 的取值范围是 $(-\frac{5}{3}, +\infty)$;
C. 若非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角是 30° .
D. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$, 则 $\angle B$ 为锐角;

【答案】AC

【解析】设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 α , 又因为 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2} \vec{b}$, 所以 $|\vec{a}| \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2} \vec{b}$, 即

$|\vec{a}| \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} |\vec{b}|$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$, 故 A 正确;

因为 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 则 $\vec{a} + \lambda \vec{b} = (1 + \lambda, 2 + \lambda)$, 又因为 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 夹角为锐角,

所以 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \lambda \vec{b}) > 0$ ，且 $\vec{a}$ 与 $(\vec{a} + \lambda \vec{b})$ 不共线，即 $\begin{cases} 1 + \lambda + 2(2 + \lambda) > 0 \\ 2(1 + \lambda) \neq 2 + \lambda \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} \lambda > -\frac{5}{3} \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$ ，所以 λ 的取值范围

是 $\left(-\frac{5}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ ，故 B 错误；

因为 $|\vec{a}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，两边同时平方得 $|\vec{a}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$ ，即 $|\vec{a}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ ，所以 $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即 $|\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，

$$\text{因此 } \cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}} = \frac{|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}|\vec{a}|^2}{\sqrt{3}|\vec{a}|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}，\text{又因为向量夹角的范围是 } [0^\circ, 180^\circ]，\text{所以 } \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = 30^\circ，\text{故 C 正确；}$$

因为 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$ ，所以 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\pi - B) = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos B > 0$ ，

因为 $|\vec{AB}| > 0, |\vec{BC}| > 0$ ，故 $\cos B < 0$ ，又因为 $B \in (0, \pi)$ ，故 $B \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，因此 $\angle B$ 为钝角，故 D 错误，故选：AC.

【一隅三反】

1. (2022·广东·饶平县) 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是单位向量，且 $2\vec{a} + \vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ ()

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【答案】D

【解析】因为 $2\vec{a} + \vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$ ，所以 $|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$ ，

因为 $\vec{a}, \vec{b}$ 是单位向量，所以 $4 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = 4$ ，所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$ ，

所以 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ ，所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，故选：D

2. (2022·陕西·蒲城县蒲城中学高一期末) 已知向量 $\vec{a} = (-2, 2)$ ， $\vec{b} = (5, k)$ ，若 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 不超过 5，则 k 的取值范围是 ()

- A. $[-4, 6]$ B. $[-6, 4]$ C. $[-6, 2]$ D. $[-2, 6]$

【答案】C

【解析】因为 $\vec{a} = (-2, 2)$ ， $\vec{b} = (5, k)$ ，所以 $\vec{a} + \vec{b} = (3, 2 + k)$ ，

所以 $|\vec{r}_a + \vec{r}_b| = \sqrt{3^2 + (2+k)^2} = \sqrt{k^2 + 4k + 13}$ ，因为 $|\vec{r}_a + \vec{r}_b|$ 不超过 5，

所以 $\sqrt{k^2 + 4k + 13} \leq 5$ ，解得： $-6 \leq k \leq 2$ ，故选：C.

3. (2022·安徽省淮南第五中学高一阶段练习) 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$ ，则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. 25

【答案】C

【解析】由 $\vec{a} = (2, 1)$ ，可得 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

由 $|\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{2}$ ，可得 $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 50$

又 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ ，则 $5 + |\vec{b}|^2 + 20 = 50$ ，解之得 $|\vec{b}| = 5$ 故选：C

4. (2022·黑龙江) (多选) 已知向量 $\vec{a} = (-3, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ， $\vec{c} = (\lambda, -1)$ ， $\lambda \in \mathbb{R}$ ， $\mu \in \mathbb{R}$ ，则 ()

- A. 若 $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ，则 $\lambda = \frac{3}{2}$ B. 若 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{c}$ ，则 $\lambda = 4$
C. 若 $\vec{a} = t\vec{b} + \vec{c}$ ，则 $\lambda + t = -4$ D. $|\vec{a} + \mu\vec{b}|$ 的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，已知 $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ，则 $(-3) \times (-1) = 2 \times \lambda$ ，解得 $\lambda = \frac{3}{2}$ ，故 A 选择正确；

对于 B 选项， $\vec{a} + 2\vec{b} = (1, 4)$ ，由于 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{c}$ ，则 $1 \times \lambda + 4 \times (-1) = 0$ ，解得 $\lambda = 4$ ，故 B 选择正确；

对于 C 选项，由于 $\vec{a} = t\vec{b} + \vec{c}$ ，则 $(-3, 2) = t(2, 1) + (\lambda, -1) = (2t + \lambda, t - 1)$ ，得 $\begin{cases} -3 = 2t + \lambda \\ 2 = t - 1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} \lambda = -9 \\ t = 3 \end{cases}$ ，故

$\lambda + t = -6$ ，故 C 选择不正确；

对于 D 选项， $\vec{a} + \mu\vec{b} = (-3 + 2\mu, 2 + \mu)$ ，

$$|\vec{a} + \mu\vec{b}| = \sqrt{(-3 + 2\mu)^2 + (2 + \mu)^2} = \sqrt{5\mu^2 - 8\mu + 13} = \sqrt{5\left(\mu - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{49}{5}} \geq \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5},$$

当 $\mu = \frac{4}{5}$ 时等号成立，即 $|\vec{a} + \mu\vec{b}|$ 的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ，故 D 选项正确. 故选：ABD

考点四 巧建坐标

【例 4-1】(2022·淄博模拟) 如图在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，F 为 AB 中点，CE = 3，CB = 8，

AB = 12，则 $\vec{EA} \cdot \vec{EB} =$ ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/847153064122006160>