【新结构】2023-2024学年江西省九师联盟高三上学期1月质量检测试数学试题❖

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

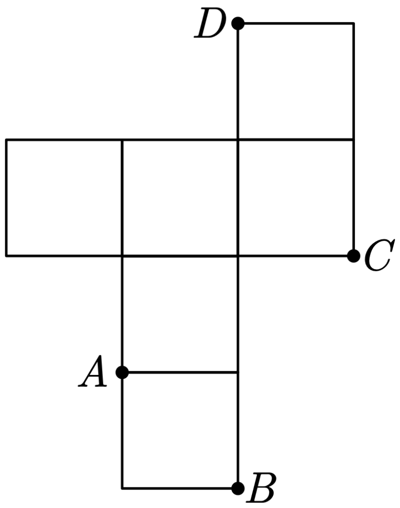
1. 已知复数z满足$z^2+1=0$，则$|z+1|=$(　)

A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

2. 已知集合$A=\{x|x^2-3x-4\geqslant 0\}$，$B=\{x|(x-2)(5-x)>0\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$(　)

A. $(-1,2)$　　B. $(2,4)$　　C. $(-4,1)$　　D. $(-4,2)$

3. 如图是正方体的表面展开图，在原正方体中，直线AB与CD所成角的大小为(　)



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 已知向量$\overrightarrow{a}=\left(log_2 3,\sin\frac{4\pi}{3}\right)$，$\overrightarrow{b}=(log_3 8,m)$，若$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，则$m=$(　)

A. $-2\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

5. 下表统计了2017年～2022年我国的新生儿数量(单位：万人).

年份	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码x	1	2	3	4	5	6
新生儿数量y	1723	1523	1465	1200	1062	956

经研究发现新生儿数量与年份代码之间满足线性相关关系，且$\hat{y}=-156.66x+\hat{a}$，据此预测2023年新生儿数量约为(　)(精确到0.1)(参考数据：$\sum_{i=1}^{6}y_i=7929$)

A. 773.2万　　B. 791.1万　　C. 800.2万　　D. 821.1万

6. 甲箱中有 2 个白球和 4 个黑球，乙箱中有 4 个白球和 2 个黑球．先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，以 A_1， A_2 分别表示由甲箱中取出的是白球和黑球；再从乙箱中随机取出一球，以 B 表示从乙箱中取出的是白球，则下列结论错误的是(　)

A. A_1， A_2 互斥　　B. $P(B|A_1)=\frac{5}{7}$　　C. $P(A_2B)=\frac{4}{7}$　　D. $P(B)=\frac{13}{21}$

7. 阿波罗尼斯（约公元前 262 年～约公元前 190 年），古希腊著名数学家，主要著作有《圆锥曲线论》、《论切触》等．尤其《圆锥曲线论》是一部经典巨著，代表了希腊几何的最高水平，此书集前人之大成，进一步提出了许多新的性质，其中也包括圆锥曲线的光学性质，光线从双曲线的一个焦点发出，通过双曲线的反射，反射光线的反向延长线经过其另一个焦点．已知双曲线 C： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1， F_2，其离心率 $e=\sqrt{5}$，从 F_2 发出的光线经过双曲线 C 的右支上一点 E 的反射，反射光线为 EP，若反射光线与入射光线垂直，则 $\sin\angle F_2F_1E=$(　)

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. 若集合 $\{x|x\ln x+(k-\ln 4)x+k<0\}$ 中仅有 2 个整数，则实数 k 的取值范围是(　)

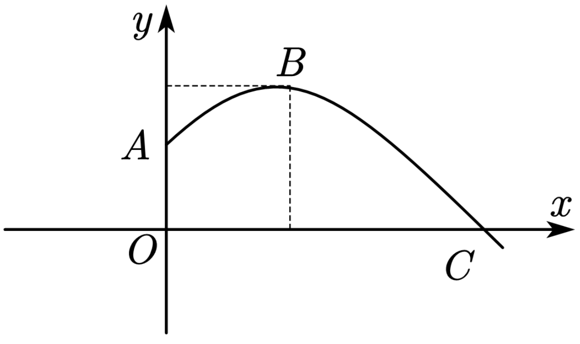
A. $\left[\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3},\frac{2}{3}\ln 2\right)$　　B. $\left[\frac{2}{3}\ln 2,\frac{3}{4}\ln 3\right)$　　C. $\left[\frac{2}{3}\ln 2,\frac{3}{2}\ln 2\right)$　　D. $\left[\frac{3}{4}\ln\frac{2}{3},\frac{2}{3}\ln 2\right)$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线 l，交抛物线于 A，B 两点，若 $|FA|=3|FB|$，则直线 l 的倾斜角可能为

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

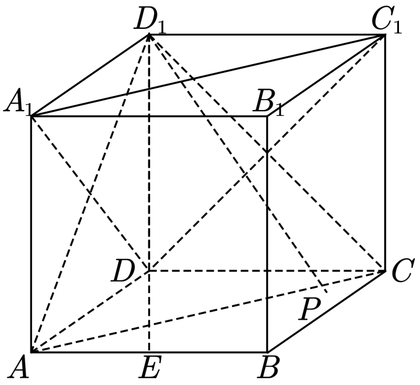
10. 已知函数 $f(x)=a\sin(\omega x+4\varphi)\left(a>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{3}\right)$，若 $f(x)$ 的图象过 $A(0,1)$， $B(m,2)$， $C(m+\pi,0)$ 三点，其中点 B 为函数 $f(x)$ 图象的最高点（如图所示），将 $f(x)$ 图象上的每个点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{4}$ 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则(　)



A. $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　B. $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称　　D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{3},-\pi\right]$ 上单调递减

11. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 是 AB 的中点，点 P 为侧面 BCC_1B_1 内（含边界）一点，则(　)



A. 若 $D_1P\perp$ 平面 A_1C_1D，则点 P 与点 B 重合

B. 以 D 为球心，$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 为半径的球面与截面 ACD_1 的交线的长度为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

C. 若 P 为棱 BC 中点，则平面 D_1EP 截正方体所得截面的面积为 $\frac{7\sqrt{17}}{6}$

D. 若 P 到直线 A_1B_1 的距离与到平面 CDD_1C_1 的距离相等，则点 P 的轨迹为一段圆弧

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项为__________.（用数字作答）

13. 已知 A 为圆 C：$x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$ 上的动点，B 为圆 E：$(x-3)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 上的动点，P 为直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上的动点，则 $|PB|-|PA|$ 的最大值为__________.

14. 在 1，3 中间插入二者的乘积，得到 1，3，3，称数列 1，3，3 为数列 1，3 的第一次扩展数列，数列 1，3，3，9，3 为数列 1，3 的第二次扩展数列，重复上述规则，可得 1，x_1，x_2，⋯，x_{2^n-1}，3 为数列 1，3 的第 n 次扩展数列，令 $a_n=log_3(1\times x_1\times x_2\times...\times x_{2^n-1}\times 3)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题 13 分）

面试是求职者进入职场的一个重要关口，也是机构招聘员工的重要环节．某科技企业招聘员工，首先要进行笔试，笔试达标者进入面试，面试环节要求应聘者回答 3 个问题，第一题考查对公司的了解，答对得 2 分，答错不得分，第二题和第三题均考查专业知识，每道题答对得 4 分，答错不得分．

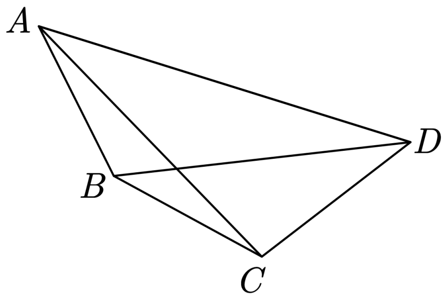
(1) 若一共有 100 人应聘，他们的笔试得分 X 服从正态分布 $N(60,144)$，规定 $X \geqslant 72$ 为达标，求进入面试环节的人数大约为多少（结果四舍五入保留整数）；

(2) 某进入面试的应聘者第一题答对的概率为 $\dfrac{2}{3}$，后两题答对的概率均为 $\dfrac{4}{5}$，每道题是否答对互不影响，求该应聘者的面试成绩 Y 的数学期望.

附：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.683$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.954$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.997$.

16.（本小题 15 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=2$，D 为 $\triangle ABC$ 外一点，$AD=2CD=4$，记 $\angle BAD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$.

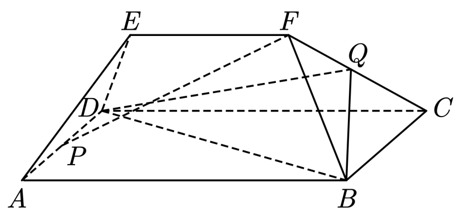


(1) 求 $2\cos\alpha-\cos\beta$ 的值；

(2) 若 $\triangle ABD$ 的面积为 S_1，$\triangle BCD$ 的面积为 S_2，求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.

17.（本小题 15 分）

我国古代数学名著《九章算术》中记载：“刍（chú）甍（méng）者，下有袤有广，而上有袤无广．刍，草也．甍，窟盖也．”翻译为“底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱．刍甍的字面意思为茅草屋顶．”现有一个“刍甍”如图所示，四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $ABFE$、$CDEF$ 为两个全等的等腰梯形，$EF \,//\, AB$，$AB=4$，$EF=AD=2$，P 是线段 AD 上一点.



(1) 若点 P 是线段 AD 上靠近点 A 的三等分点，Q 为线段 CF 上一点，且 $\overrightarrow{FQ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{FC}$，证明：$PF \,//$ 平面 BDQ；

(2) 若 E 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\dfrac{3}{2}$，PF 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，求 AP 的长.

18.（本小题 17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，右顶点为 A，且 $|AF_1|+|AF_2|=4$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 已知点 $B(-1,0)$，M，N 是曲线 C 上两点（点 M，N 不同于点 A），直线 AM，AN 分别交直线 $x=-1$ 于 P，Q 两点，若 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{9}{4}$，证明：直线 MN 过定点.

19.（本小题 17 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-a\ln x(a\in\boldsymbol{R})$.

(1) 当 $a=e$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若 $f(x)$ 有 2 个零点，求 a 的取值范围.

答案和解析

1.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查复数的模及其几何意义，属于基础题.

利用复数运算可求出 z，进而利用复数模公式求出结果.

【解答】

解：因为 $z^2+1=0$，所以 $z=\pm i$，

所以 $|z+1|=|1\pm i|=\sqrt{1^2+(\pm 1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：C.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查交并补混合运算，解不含参的一元二次不等式，属于基础题.

先解一元二次不等式得出集合 A，B，再由集合的补集运算与交集运算得出即可得出答案.

【解答】

解：求 A 中的不等式：$x^2-3x-4\geqslant 0$，

得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 4$，

所以 $A=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$，

所以 $\complement_R A=(-1,4)$，

求 B 中的不等式：$(x-2)(5-x)>0$，

得 $2<x<5$，

所以 $B=(2,5)$，

所以 $(\complement_R A)\cap B=(2,4)$.

故选：B.

3.【答案】D

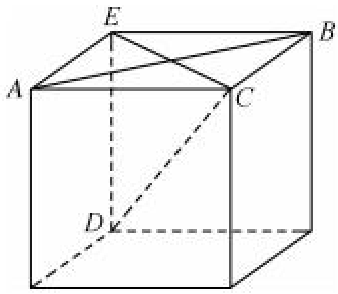
【解析】【分析】

本题考查了异面直线所成角，线面垂直的判定，属于基础题.

将正方体的表面展开图还原为正方体，证明 $AB\perp$平面DCE，即可证明 $AB\perp CD$，即可得答案.

【解答】

解：将表面展开图还原为正方体，AB 与 CD 在正方体中的位置如图所示，



$\because DE\perp$ 平面 $ACBE$， $AB\subset$ 平面 $ACBE$，

$\therefore DE\perp AB$，

$\because AB\perp CE$， $DE\cap CE=E$，DE， $CE\subset$ 平面 DCE，

$\therefore AB\perp$ 平面 DCE，

又 $CD\subset$ 平面 DCE，

所以 $AB\perp CD$，

故直线 AB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

故选： D.

4.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查平面向量数量积的坐标表示与向量垂直的关系，属于基础题.

由向量垂直得出两向量的数量积为 0，得出关系式求出 m 的值即可.

【解答】

解：因为 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，

即 $\log_2 3\times\log_3 8+m\sin\frac{4\pi}{3}=0$，

所以 $\log_2 8-\frac{\sqrt{3}}{2}m=0$，

所以 $m=2\sqrt{3}$.

故选 C.

5.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了用回归直线方程对总体进行估计，属于基础题.

由题意得$\overline{x}$，$\overline{y}$，根据公式计算$\hat{a}$，可得y关于x的线性回归方程，将2023年对应的年份代码$x=7$代入回归方程即可求解答案.

【解答】

解：由题意得$\overline{x}=3.5$，$\overline{y}=\dfrac{7929}{6}=1321.5$，

所以$\hat{a}=\overline{y}+156.66\times 3.5=1321.5+548.31=1869.81$，

所以$\widehat{y}=-156.66x+1869.81$，

当$x=7$时，

$\widehat{y}=-156.66\times 7+1869.81=773.19\approx 773.2$.

故选：A.

6.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查互斥事件，相互独立事件的概率乘法公式，条件概率的求法，属于基础题.

由题意A_1，A_2，是两两互斥的事件，由条件概率公式求出$P(B|A_1)$，$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，对照四个选项进行判断，选出正确选项.

【解答】

解：因为每次取一球，不可能同时从甲箱中取出白球和黑球，

所以A_1，A_2是两两互斥的事件，故A项正确;

因为$P(A_1)=\dfrac{1}{3}$，$P(A_2)=\dfrac{2}{3}$，

所以$P(B|A_1)=\dfrac{P(BA_1)}{P(A_1)}=\dfrac{\frac{5}{21}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{7}$，

所以$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{13}{21}$，故$BD$项正确;

因为$P(A_2B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{21}$，故$C$错误.

故选：C.

7.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查双曲线的定义和离心率，属于中档题.

由题意，结合双曲线的定义和离心率，求出$c=\sqrt{5}a$，$|EF_2|=2a$，再利用$\sin\angle F_2F_1E=\dfrac{|EF_2|}{|F_1F_2|}$求解.

【解答】

解：设$|EF_1|=m$，$|EF_2|=n$，$|F_1F_2|=2c$，

由题意知$m-n=2a$，$F_2E\perp F_1E$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$，

所以$m^2+n^2-2mn=4a^2$，$c=\sqrt{5}a$，

$m^2+n^2=4c^2$，

所以$mn=2c^2-2a^2=8a^2$，

又$m-n=2a$，所以$n^2+2an-8a^2=0$，解得$n=2a$，

所以$\sin\angle F_2F_1E=\dfrac{|EF_2|}{|F_1F_2|}=\dfrac{2a}{2\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选B.

8.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查了利用导数求解函数的单调性，求解函数的零点问题，体现数形结合思想的应用.

原不等式等价于，$k(x+1)<x\ln 4-x\ln x$，设$g(x)=k(x+1)$，$f(x)=x\ln 4-x\ln x$，然后转化为函数图象的交点结合图象可求.

【解答】

解：原不等式等价于$k(x+1)<x\ln 4-x\ln x$，设$g(x)=k(x+1)$，$f(x)=x\ln 4-x\ln x$，

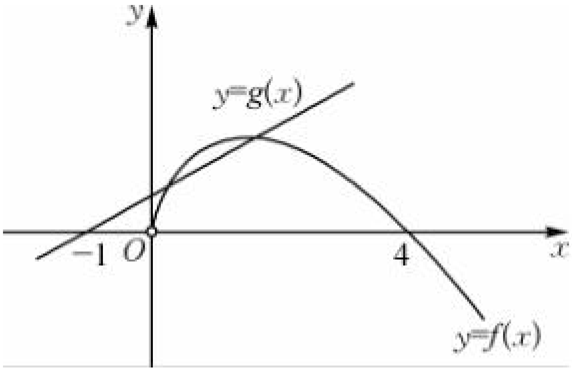
则$f'(x)=\ln 4-(1+\ln x)=\ln\dfrac{4}{x}-1$，

令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{4}{e}$.

当$0<x<\dfrac{4}{e}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

当$x>\dfrac{4}{e}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

又$f(4)=0$，$x\to 0$时，$f(x)\to 0$，因此$y=f(x)$与$y=g(x)$的大致图象如图，



当 $k\leqslant 0$ 时，显然不满足题意;当 $k>0$ 时，当且仅当 $\begin{cases} g(1)<f(1) \\ g(2)<f(2) \\ g(3)\geqslant f(3) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} g(1)\geqslant f(1) \\ g(2)<f(2) \\ g(3)<f(3) \end{cases}$，

由第一个不等式组，得 $\begin{cases} 2k<\ln\ 4, \\ 3k<2\ln\ 4-2\ln\ 2, \\ 4k\geqslant 3\ln\ 4-3\ln\ 3, \end{cases}$ 即 $\frac{3}{4}\ln\ \frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln\ 2,$

由第二个不等式组，得 $\begin{cases} 2k\geqslant\ln\ 4, \\ 3k<2\ln\ 4-2\ln\ 2, \\ 4k<3\ln\ 4-3\ln\ 3. \end{cases}$ 该不等式组无解.

综上所述，$\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln 2.$

故选 A.

9.【答案】BC

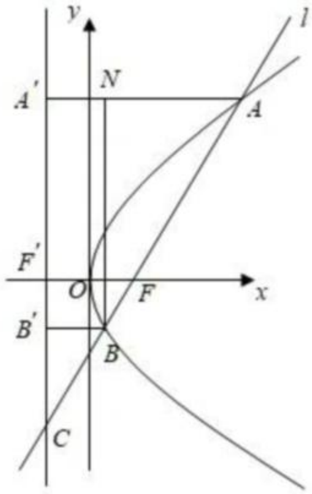
【解析】【分析】

本题考查了抛物线的定义，直线与抛物线的位置关系，属于基础题.

设直线 l 交准线于 C，分点 A 在第一象限和第四象限两种情况讨论，结合抛物线的定义以及已知条件即可求解.

【解答】

解：如果 A 在第一象限，设抛物线准线交 x 轴于 F'，分别过 A，B 作准线的垂线，垂足为 A'，B'，直线 l 交准线于 C，作 $BN\perp AA'$，垂足为 N，如图所示：



则 $|AA'|=|AF|$， $|BB'|=|BF|$，

$|AF|=3|BF|$，

所以 $|AN|=2|BF|$， $|AB|=4|BF|$，

$\cos\angle NAB=\dfrac{1}{2}$， $\angle \mathrm{NAB}=\ 60^\circ$，

则 l 的倾斜角 $\angle AFx=60^\circ$；

同理，如果 A 在第四象限，可得倾斜角为 120°.

故选： BC.

10.【答案】BC

【解析】【分析】

本题主要考查判断正弦型函数的单调性或求解单调区间，求正弦型函数的对称轴、对称中心，正弦型函数的图象变换，属于中档题.

根据 B 点坐标求出 a，根据点 B 与点 C 坐标，求出周期，进而求出 ω，再由 A 点坐标求出 φ，求出 $f(x)$ 的解析式，可判断选项 A；根据坐标变换关系，求出 $g(x)$ 的解析式，可判断选项 B；将 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 代入 $f(x)$，即可判断 C 选项；求出 $g(x)$ 的单调递减区间，即可判断选项 D.

【解答】

解：对于 A，由题意得 $a=2$， $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$， $\omega=\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)=2\sin(\dfrac{1}{2}x+4\varphi)$，

$f'(x)=\cos(\dfrac{1}{2}x+4\varphi)$.

由 $f(0)=1$， $f'(0)>0$，得 $2\sin 4\varphi=1$， $\cos 4\varphi>0$，