

2023-2024 学年广西桂林中山中学高三第一次大联考数学试题试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

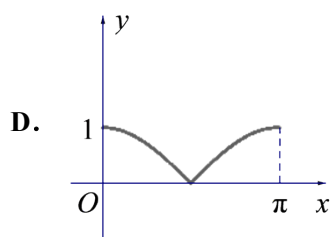
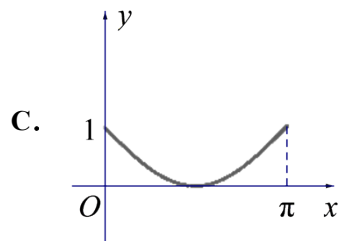
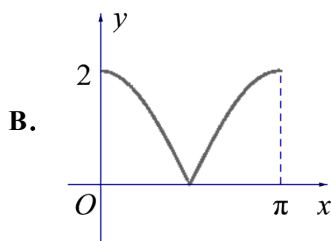
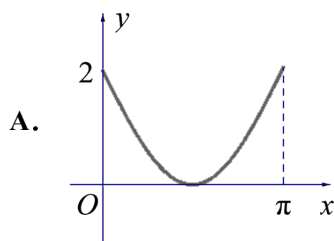
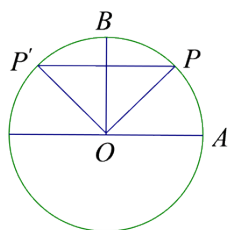
1. 已知实数 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $1 < a \leq 2$ B. $a < 5$ C. $3 < a < 5$ D. $2 \leq a \leq 5$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ ，则不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{2}{3})$ B. $(-\infty, \frac{2}{3})$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

3. 如图，圆 O 的半径为 1， A ， B 是圆上的定点， $OB \perp OA$ ， P 是圆上的动点，点 P 关于直线 OB 的对称点为 P' ，角 x 的始边为射线 OA ，终边为射线 OP ，将 $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}|$ 表示为 x 的函数 $f(x)$ ，则 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图像大致为 ()



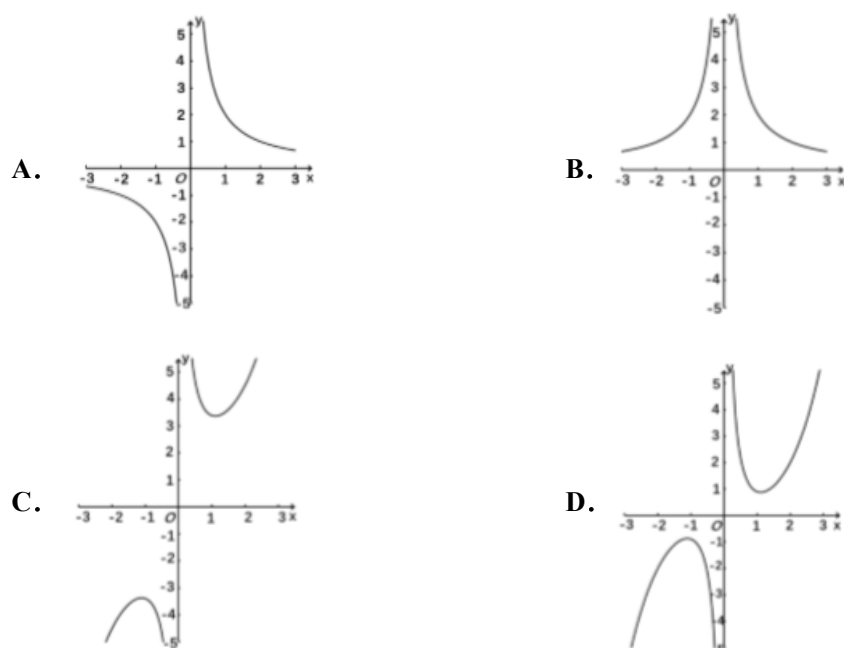
4. 已知复数 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$ (i 为虚数单位), 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则 $a =$ ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

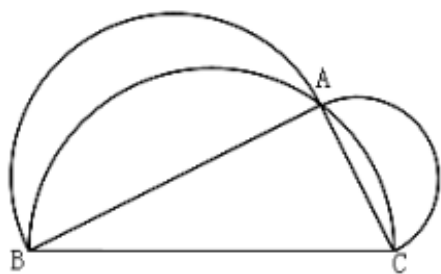
5. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z =$ ()

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

6. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x^2 + 1)}$ 在 $[-3, 3]$ 的图象大致为()

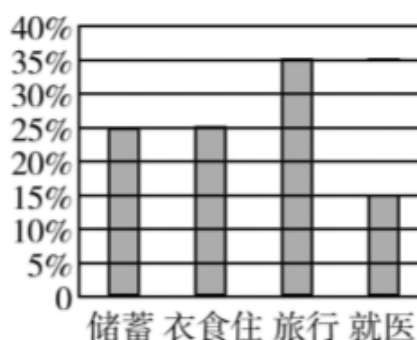
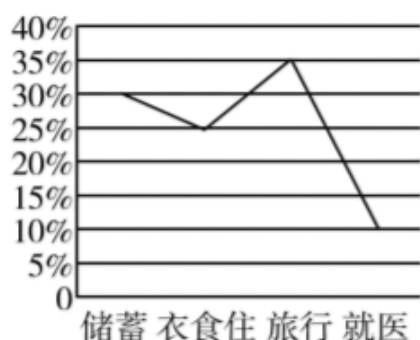


7. 下图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形, 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 、直角边 AB 、 AC , 已知以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$, 记 $\angle ABC = \alpha$, 则 $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha =$ ()



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 1 D. $\frac{8}{5}$

8. 某人 2018 年的家庭总收入为 80000 元, 各种用途占比如图中的折线图, 2019 年家庭总收入的各种用途占比统计如图中的条形图, 已知 2019 年的就医费用比 2018 年的就医费用增加了 4750 元, 则该人 2019 年的储蓄费用为 ()



- A. 21250 元 B. 28000 元 C. 29750 元 D. 85000 元

9. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$, 则下列结论中不正确的是

- A. y 与 x 具有正的线性相关关系
 B. 回归直线过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$
 C. 若该大学某女生身高增加 1cm, 则其体重约增加 0.85kg
 D. 若该大学某女生身高为 170cm, 则可断定其体重比为 58.79kg

10. 若函数 $f(x) = a^{|2x-4|}$ ($a > 0, a \neq 1$) 满足 $f(1) = \frac{1}{9}$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$
 C. $[-2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2]$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) < 2$, 则 x_0 的取值范围是 ()

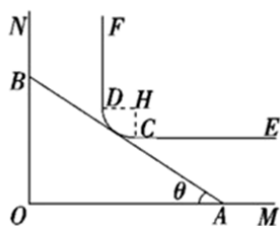
- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$

12. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点, 则双曲线的离心率的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 如图, 某市一学校 H 位于该市火车站 O 北偏东 45° 方向, 且 $OH = 4\sqrt{2}km$, 已知 OM, ON 是经过火车站 O 的两条互相垂直的笔直公路, CE, DF 及圆弧 CD 都是学校道路, 其中 $CE \parallel OM, DF \parallel ON$, 以学校 H 为圆心, 半径为 $2km$ 的四分之一圆弧分别与 CE, DF 相切于点 C, D . 当地政府欲投资开发 $\angle AOB$ 区域发展经济, 其中 A, B 分别在公路 OM, ON 上, 且 AB 与圆弧 CD 相切, 设 $\angle OAB = \theta$, $\angle AOB$ 的面积为 $S km^2$.



(1) 求 S 关于 θ 的函数解析式;

(2) 当 θ 为何值时, $\triangle AOB$ 面积 S 为最小, 政府投资最低?

14. 已知函数 $f(x) = x - m|\ln x|$ 恰好有 3 个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为_____

15. 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 满足 $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$, 则 $(x^2 + x + y)^n$ 的展开式中 $x^5 y^2$ 的系数为_____.

16. 若变量 x, y 满足: $\begin{cases} 2x - y + 2 \leq 0 \\ x + 2y - 4 \geq 0 \\ x - 3y + 11 \geq 0 \end{cases}$, 且满足 $(t+1)x + (t-1)y + t + 1 = 0$, 则参数 t 的取值范围为_____.

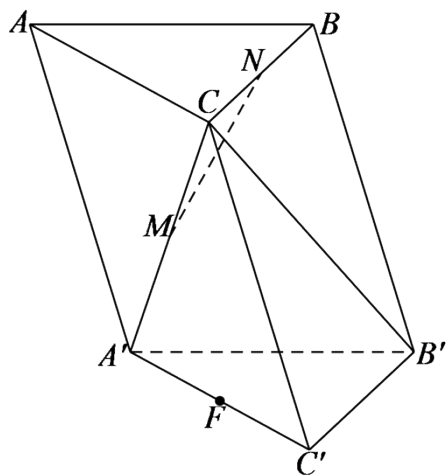
三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设函数 $f(x) = 5 - |x + a| - |x - 2|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

18. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 中, M, N, F 分别是 $A'C, BC, A'C'$ 的中点.



(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 CFB' ;

(2) 若底面 $A'B'C'$ 是正三角形, $A'C' = 1$, C 在底面的投影为 F , 求 B' 到平面 $AA'C'C$ 的距离.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{e^x} - 1$.

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^{\frac{5}{2}}$;

(2) 若函数 $f(x)$ 只有一个零点, 求正实数 a 的值.

20. (12 分) 某生物研究小组准备探究某地区蜻蜓的翼长分布规律, 据统计该地区蜻蜓有 A, B 两种, 且这两种的个体数量大致相等, 记 A 种蜻蜓和 B 种蜻蜓的翼长(单位: mm) 分别为随机变量 X, Y , 其中 X 服从正态分布 $N(45, 25)$, Y 服从正态分布 $N(55, 25)$.

(I) 从该地区的蜻蜓中随机捕捉一只, 求这只蜻蜓的翼长在区间 $[45, 55]$ 的概率;

(II) 记该地区蜻蜓的翼长为随机变量 Z , 若用正态分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ 来近似描述 Z 的分布, 请你根据 (I) 中的结果, 求参数 μ_0 和 σ_0 的值 (精确到 0.1);

(III) 在 (II) 的条件下, 从该地区的蜻蜓中随机捕捉 3 只, 记这 3 只中翼长在区间 $[42.2, 57.8]$ 的个数为 W , 求 W 的分布列及数学期望 (分布列写出计算表达式即可).

注: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - 0.64\sigma \leq X \leq \mu + 0.64\sigma) \approx 0.4773$, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9546$.

21. (12 分) 设 $f(x) = |x| - 2|x - a| (a > 0)$

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 点 D 为边 BC 上的动点 (不与 C 点重合), 设 $AD = \lambda DC$, 求 λ 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

根据题意，对于函数分2段分析：当 $x < 1$, $f(x) = a^x$ ，由指数函数的性质分析可得 $a > 1$ ①，当

$x \geq 1$, $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x$ ，由导数与函数单调性的关系可得 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$ ，在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，变形

可得 $a \geq 2$ ②，再结合函数的单调性，分析可得 $a \leq 1 + 4$ ③，联立三个式子，分析可得答案.

【详解】

解：根据题意，函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 1 \\ x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增，

当 $x < 1$, $f(x) = a^x$ ，若 $f(x)$ 为增函数，则 $a > 1$ ①，

当 $x \geq 1$, $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} + a \ln x$ ，

若 $f(x)$ 为增函数，必有 $f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，

变形可得： $a \geq \frac{4}{x} - 2x^2$ ，

又由 $x \geq 1$ ，可得 $g(x) = \frac{4}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，则 $\frac{4}{x} - 2x^2 \leq \frac{4}{1} - 2 = 2$ ，

若 $a \geq \frac{4}{x} - 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，则有 $a \geq 2$ ②，

若函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，左边一段函数的最大值不能大于右边一段函数的最小值，

则需有 $a \leq 1 + 4 = 5$ ， ③

联立①②③可得： $2 \leq a \leq 5$.

故选：D.

【点睛】

本题考查函数单调性的性质以及应用，注意分段函数单调性的性质.

2、B

【解析】

由导数确定函数的单调性，利用函数单调性解不等式即可.

【详解】

函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ ，可得 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ ，

$x \in (0, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

$\because e^{1-x} > 0$ ， $e^{2x-1} > 0$ ，

故不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集等价于不等式 $e^{1-x} > e^{2x-1}$ 的解集.

$$1-x > 2x-1.$$

$$\therefore x < \frac{2}{3}.$$

故选: B.

【点睛】

本题主要考查了利用导数判定函数的单调性, 根据单调性解不等式, 属于中档题.

3、 B

【解析】

根据图象分析变化过程中在关键位置及部分区域, 即可排除错误选项, 得到函数图象, 即可求解.

【详解】

由题意, 当 $x=0$ 时, P 与 A 重合, 则 P' 与 B 重合,

所以 $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{BA}| = 2$, 故排除 C, D 选项;

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}| = |P'P| = 2\sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\cos x$, 由图象可知选 B.

故选: B

【点睛】

本题主要考查三角函数的图像与性质, 正确表示函数的表达式是解题的关键, 属于中档题.

4、 C

【解析】

把 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$ 代入 $\frac{z_1}{z_2}$, 利用复数代数形式的除法运算化简, 由实部为 0 且虚部不为 0 求解即可.

【详解】

$$\because z_1 = 1 + ai \ (a \in R), \ z_2 = 1 + 2i,$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+ai}{1+2i} = \frac{(1+ai)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+2a}{5} + \frac{a-2}{5}i,$$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} 1+2a=0 \\ a-2 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的除法运算，考查复数的基本概念，是基础题.

5、A

【解析】

分析：题设中复数满足的等式可以化为 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i$ ，利用复数的四则运算可以求出 z .

详解：由题设有 $\bar{z} = \frac{5}{1+2i} + i = 1 - 2i + i = 1 - i$ ，故 $z = 1 + i$ ，故选 A.

点睛：本题考查复数的四则运算和复数概念中的共轭复数，属于基础题.

6、C

【解析】

先根据函数奇偶性排除 B，再根据函数极值排除 A；结合特殊值即可排除 D，即可得解.

【详解】

$$\text{函数 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x^2 + 1)},$$

$$\text{则 } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{\ln(x^2 + 1)} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 为奇函数, 排除 B 选项;}$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \approx \frac{e^x}{\ln x^2} \rightarrow +\infty, \text{ 所以排除 A 选项;}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(1) = \frac{e - e^{-1}}{\ln(1+1)} = \frac{e - e^{-1}}{\ln 2} \approx \frac{2.72 - 0.37}{0.69} \approx 3.4, \text{ 排除 D 选项;}$$

综上所述，C 为正确选项，

故选：C.

【点睛】

本题考查根据函数解析式判断函数图像，注意奇偶性、单调性、极值与特殊值的使用，属于基础题.

7、D

【解析】

根据以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比求得 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，即 $\tan \alpha$ 的值，由此求得 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值，进而求得所求表达式的值.

【详解】

由于直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，即 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，

$$\text{所以 } \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}.$$

故选：D

【点睛】

本小题主要考查同角三角函数的基本关系式，考查二倍角公式，属于基础题.

8、A

【解析】

根据 2018 年的家庭总收入为 80000 元，且就医费用占 10% 得到就医费用 $80000 \times 10\% = 8000$ ，再根据 2019 年的就医费用比 2018 年的就医费用增加了 4750 元，得到 2019 年的就医费用，然后由 2019 年的就医费用占总收入 15%，得到 2019 年的家庭总收入再根据储蓄费用占总收入 25% 求解.

【详解】

因为 2018 年的家庭总收入为 80000 元，且就医费用占 10%

所以就医费用 $80000 \times 10\% = 8000$

因为 2019 年的就医费用比 2018 年的就医费用增加了 4750 元，

所以 2019 年的就医费用 12750 元，

而 2019 年的就医费用占总收入 15%

所以 2019 年的家庭总收入为 $12750 \div 15\% = 85000$

而储蓄费用占总收入 25%

所以储蓄费用： $85000 \times 25\% = 21250$

故选：A

【点睛】

本题主要考查统计中的折线图和条形图的应用，还考查了建模解模的能力，属于基础题.

9、D

【解析】

根据 y 与 x 的线性回归方程为 $y = 0.85x - 85.71$ ，则

$\hat{b} = 0.85 > 0$ ， y 与 x 具有正的线性相关关系，A 正确；

回归直线过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ ，B 正确；

该大学某女生身高增加 1cm，预测其体重约增加 0.85kg，C 正确；

该大学某女生身高为 170cm，预测其体重约为 $0.85 \times 170 - 85.71 = 58.79\text{kg}$ ，D 错误.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/848055054030006134>