2023-2024学年四川省成都市石室中学竞赛班高一（下）期末数学试卷

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数$z=(2-a)+(2a-1)i(a\in R)$为纯虚数，则复数$z+a$在复平面上的对应点的位置在(   )

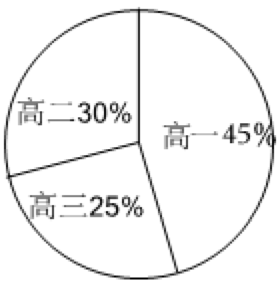
A. 第一象限内　　B. 第二象限内　　C. 第三象限内　　D. 第四象限内

2. 数据x_1，x_2，…，x_{10}的方差$s^2=0$，则下列数字特征一定为0的是(   )

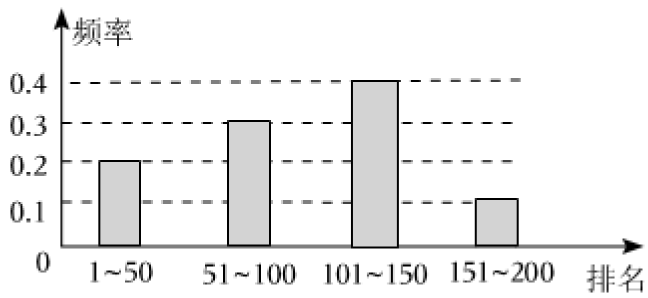
A. 平均数　　B. 中位数　　C. 众数　　D. 极差

3. 某中学组织三个年级的学生进行党史知识竞赛.经统计，得到前200名学生分布的扇形图(如图)和前200名中高一学生排名分布的频率条形图(如图)，则下列命题错误的是(   )

前200名学生分布的饼状图



前200名中高一学生排名分布的频率条形图



A. 成绩前200名的学生中，高一人数比高二人数多30人

B. 成绩前100名的学生中，高一人数不超过50人

C. 成绩前50名的学生中，高三人数不超过32人

D. 成绩第51名到第100名的学生中，高二人数比高一人数多

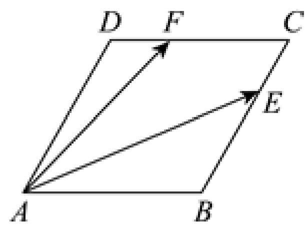
4. 命题“$\exists x\in[1,2]$，$x^3+2x-a>0$”为假命题的一个必要不充分条件是(   )

A. $a\geq 11$　　B. $a\leq 11$　　C. $a\geq 12$　　D. $a\leq 12$

5. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A，B，C所对的边，且$sinA=2sinB$，$2acosC+b=0$，则$cosA=$(   )

A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 如图，在菱形$ABCD$中，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，且$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CE}=\mu\overrightarrow{CB}$，若$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AF}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AE}$，则$\lambda+\mu=$(   )



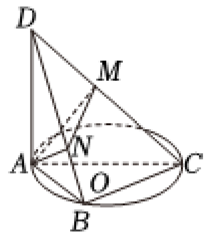
A. $\frac{2}{3}$

B. 1

C. $\frac{4}{3}$

D. 2

7. 如图，AC是圆O的直径，$\angle DCA = 45°$，DA垂直于圆O所在的平面，B为圆周上不与点A，C重合的点，$AM \perp DC$于M，$AN \perp DB$于N，则下列结论不正确的是(   )



A. 平面$ABC \perp$平面DAC

B. $CB \perp$平面BAD

C. $CD \perp$平面AMN

D. 平面$AMN \perp$平面DAB

8. 美国数学家$JackKiefer$于1953年提出0.618优选法，又称黄金分割法，是在优选时把尝试点放在黄金分割点上来寻找最优选择.我国著名数学家华罗庚于20世纪60、70年代对其进行简化、补充，并在我国进行推广，广泛应用于各个领域.黄金分割比$t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$，现给出三倍角公式$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$，则$t$与$sin18°$的关系式正确的为(   )

A. $2t = 3sin18°$　　B. $t = 2sin18°$　　C. $t = \sqrt{5}sin18°$　　D. $t = \sqrt{6}sin18°$

二、多选题：本题共 4 小题，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9. 已知向量$\vec{a} = (1,-2)$，$\vec{b} = (\lambda,1)$，则下列说法中正确的是(   )

A. 若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\lambda = \frac{1}{2}$　　B. 若$\vec{a} \perp \vec{b}$，则$\lambda = 2$

C. 若$\lambda < 2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角　　D. 当$\lambda = 1$时，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量的坐标为$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

10. 设z_1，z_2为复数，则下列结论中正确的是(   )

A. 若$\frac{1}{z_1}$为虚数，则z_1也为虚数　　B. 若$|z_1 + i| = 1$，则$|z_1|$的最大值为$\sqrt{2}$

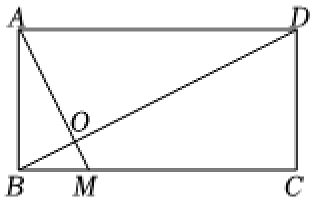
C. $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z_2}|$　　D. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

11. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c = 2$且$\frac{a+c}{b} = \frac{sinA - sinB}{sinA - sinC}$，则下列结论正确的是(   )

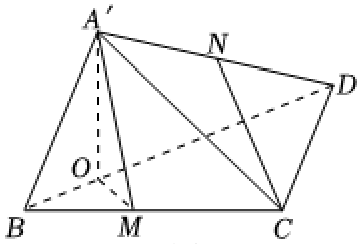
A. $C = \frac{\pi}{3}$　　B. a的取值范围为$(0,2]$

C. ab的最大值为4　　D. 若D为AB的中点，则CD的取值范围为$(1,2)$

12. 如图一，矩形$ABCD$中，$BC=2AB=2$，$AM\perp BD$交对角线BD于点O，交BC于点M.现将$\triangle ABD$沿BD翻折至$\triangle A'BD$的位置，如图二，点N为棱$A'D$的中点，则下面结论正确的是(   )



图一



图二

A. 存在某个位置使得$CN//$平面$A'OM$

B. 在翻折过程中，恒有$BD\perp A'M$

C. 若二面角$A'-BD-C$的平面角为$\frac{\pi}{3}$，则$A'C=\frac{\sqrt{65}}{5}$

D. 若A'在平面BCD上的射影落在$\triangle BCD$内部，则$V_{A'-BCD}\in(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{2\sqrt{5}}{15})$

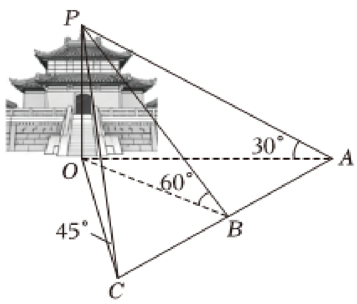
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 将10个数据按照从小到大的顺序排列如下：11，15，17，a，23，26，27，34，37，38，若该组数据的40%分位数为22，则$a=$ ______.

14. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$.若$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位所得的图象与$f(x)$的图象重合，则$\omega$的最小值为______.

15. 若某球体的半径与某圆锥的底面半径相等，且该球体的表面积为S_1，体积为V_1，该圆锥的侧面积为S_2，体积为V_2，若$\frac{2S_1}{S_2}=\frac{V_1}{V_2}$，则该球体半径与该圆锥母线的比值为______.

16. 镇江西津渡的云台阁，是一座宋元风格的仿古建筑，始建于2010年，目前已成为镇江市的地标建筑之一.如图，在云台阁旁水平地面上共线的三点A，B，C处测得其顶点P的仰角分别为30°，60°，45°，且$AB=BC=40$米，则云台阁的高度为______米.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题10分)

已知函数$f(x)=\sqrt{3}sin2x+cos2x$.

(I)求函数$f(x)$的最小正周期和对称中心；

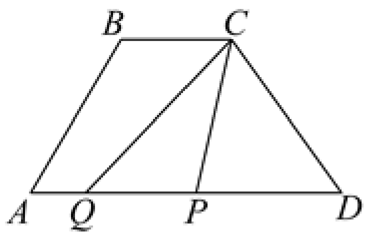
(II)求函数$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域.

18. (本小题12分)

如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B = 120°$，$AB = 2$，$AD = 3$，且$\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$，若$P$，$Q$为线段$AD$上的两个动点，且$|PQ| = 1$.

(1)当P为AD的中点时，求CP的长度；

(2)求$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}$的最小值.



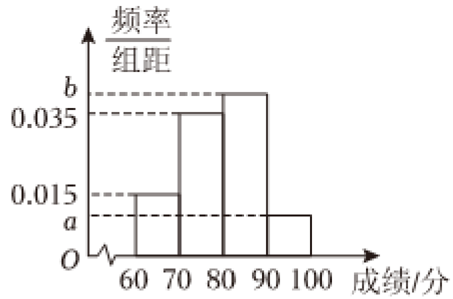
19. (本小题12分)

2023年起我国旅游按下重启键，寒冬有尽，春日可期，先后出现了“淄博烧烤”，“尔滨与小土豆”，“天水麻辣烫”等现象级爆款，之后各地文旅各出奇招，衢州文旅也在各大平台发布了衢州的宣传片：孔子，金庸，搁袋饼纷纷出场.现为进一步发展衢州文旅，提升衢州经济，在5月份对来衢旅游的部分游客发起满意度调查，从饮食、住宿，交通，服务等方面调查旅客满意度，满意度采用百分制，统计的综合满意度绘制成如下频率分布直方图，图中$b = 4a$.

(I)求图中a的值并估计满意度得分的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)；

(II)若有超过60%的人满意度在75分及以上，则认为该月文旅成绩合格.衢州市5月份文旅成绩合格了吗？

(III)衢州文旅6月份继续对来衢旅游的游客发起满意度调查.现知6月1日−6月7日调查的4万份数据中其满意度的平均值为80，方差为75；6月8日−6月14日调查的6万份数据中其满意度的平均值为90，方差为70.由这些数据计算6月1日一6月14日的总样本的平均数与方差.

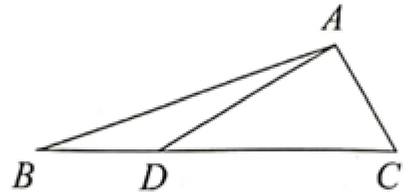


20. (本小题12分)

如图，在$\triangle ABC$中，D是BC边上的一点，$\alpha = \angle BAD$，$\beta = \angle DAC$.

(1)证明：$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot sin\alpha}{AC \cdot \sin\beta}$；

(2)若D为靠近B的三等分点，$AB = 2\sqrt{7}$，$AC = 2$，$\beta = 90°$，$\angle BAC$为钝角，求$S_{\triangle ACD}$.

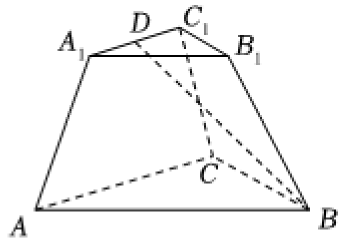


21. (本小题12分)

如图，三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，四边形ACC_1A_1是等腰梯形，且$A_1C_1=AA_1=1$，D为A_1C_1的中点.

(I)证明：$AC\perp BD$；

(II)若过B，B_1，D三点的平面截三棱台$ABC-A_1B_1C_1$所得的截面面积为$\frac{9\sqrt{3}}{16}$.当二面角A_1-AC-B为锐二面角时，求二面角B_1-BC-A的正弦值.



22. (本小题12分)

在四面体$ABCD$中，$AB=a$，$CD=b$，记四面体$ABCD$的内切球半径为r.分别过点A，B，C，D向其对面作垂线，垂足分别为H_1，H_2，H_3，H_4.

(1)是否存在四个面都是直角三角形的四面体$ABCD$？(不用说明理由)

(2)若垂足H_1恰为正$\triangle BCD$的中心，证明：$r=\frac{b\sqrt{3a^2-b^2}}{3\sqrt{4a^2-b^2}+\sqrt{3}b}$；

(3)已知$a+b=2024$，证明：$r<253$.

答案解析

1.A

【解析】解：$\because$复数$z=(2-a)+(2a-1)i(a\in R)$为纯虚数，$\therefore a=2$，

复数$z+a=3i+2$在复平面上的对应点为$(2,3)$，位置在第一象限．

故选：A．

根据纯虚数的定义解出a，利用复数的几何意义求解．

本题考查复数的几何意义，属于基础题．

2.D

【解析】解：设数据x_1，x_2，…，x_{10}的平均数为$\overline{x}$，

则$s^2=\frac{1}{10}\times[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_{10}-\overline{x})^2]=0$，

所以$(x_1-\overline{x})^2=0$，$(x_2-\overline{x})^2=0$，…，$(x_{10}-\overline{x})^2=0$，

所以$x_1=x_2=\ldots=x_{10}=\overline{x}$，

所以极差一定为0，

而平均数、中位数，众数不一定为0．

故选：D．

设数据x_1，x_2，…，x_{10}的平均数为$\overline{x}$，根据方差的定义可知$x_1=x_2=\ldots=x_{10}=\overline{x}$，再结合平均数，中位数，众数和极差的定义判断．

本题主要考查了平均数，方差，中位数、众数和极差的定义，属于基础题．

3.D

【解析】解：由饼状图，成绩前200名的200人中，高一人数比高二人数多$200\times(45\%-30\%)=30$，A正确；

由条形图知高一学生在前200名中，前100和后100人数相等，因此高一人数为$200\times45\%\times\frac{1}{2}=45<50$，$B$正确；

成绩前50名的50人中，高一人数为$200\times45\%\times0.2=18$，因此高三最多有$32$人，$C$正确；

第51到100名的50人中，高一人数为$200\times45\%\times0.3=27$，故高二最多有$23$人，因此高二人数比高一少，$D$错误．

故选：D.

根据饼状图和条形图提供的数据判断.

本题主要考查了统计图的应用，属于基础题.

4.A

【解析】解：若命题“$\exists x \in [1,2]$，$x^3+2x-a>0$”为假命题，

则“$\forall x \in [1,2]$，$x^3+2x-a \leq 0$”为真命题，

可得$\forall x \in [1,2]$，$a \geq x^3+2x$恒成立，即$a \geq (x^3+2x)_{max}$，

令$f(x)=x^3+2x$，因为$y=x^3$，$y=2x$都是单调递增函数，

所以$f(x)=x^3+2x$在$x \in [1,2]$上是单调递增函数，

所以$f(2)_{max}=2^3+2\times 2=12$，

可得$a \geq 12$，结合选项，

命题“$\exists x \in [1,2]$，$x^3+2x-a>0$”为假命题的一个必要不充分条件是$a \geq 11$.

故选：A.

转化为$\forall x \in [1,2]$，$a \geq x^3+2x$恒成立求出x^3+2x的最大值即可.

本题主要考查了含有量词的命题的真假关系的应用，属于基础题.

5.C

【解析】解：因为$sinA=2sinB$，所以$a=2b$，

因为$2acosC+b=0$，所以$2a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+b=0$，

化简得$a^2+2b^2-c^2=0$，

将$a=2b$代入可得$6b^2=c^2$，即$c=\sqrt{6}b$，

所以$cosC=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+6b^2-4b^2}{2b\times\sqrt{6}b}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故选：C.

根据正弦定理，将角化边，再用余弦定理的推论得到$c=\sqrt{6}b$，再次用余弦定理的推论求解$cosA$即可.

本题考查正弦定理及余弦定理，属中档题.

6.B

【解析】解：由题意，以$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AB}$向量作为基底，

因为$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{CE}=\mu\overrightarrow{CB}$，且$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

则$\overrightarrow{DF}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{BE}=(1-\mu)\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AF}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AE}=(\frac{9}{7}-\frac{6}{7}\mu)\overrightarrow{AD}+(\frac{9}{7}-\frac{3}{7}\lambda)\overrightarrow{AB}$，

又因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$，

所以$\begin{cases}\frac{9}{7}-\frac{6}{7}\mu=1\\ \frac{9}{7}-\frac{3}{7}\lambda=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}\mu=\frac{1}{3}\\ \lambda=\frac{2}{3}\end{cases}$，

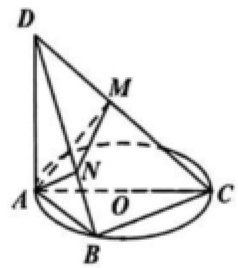
所以$\lambda+\mu=1$.

故选：B.

以$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$向量作为基底，用基底表示$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{AD}$，然后代入已知条件得$\overrightarrow{AC}=(\frac{9}{7}-\frac{6}{7}\mu)\overrightarrow{AD}+(\frac{9}{7}-\frac{3}{7}\lambda)\overrightarrow{AB}$，再根据$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$即可求解.

本题考查平面向量基本定理，属中档题.

7.D



【解析】解：AC是圆O的直径，$\angle DCA=45^\circ$，DA垂直于圆O所在的平面，

因为$DA\subset$平面DAC，所以平面$DAC\perp$平面BAC，所以A正确；

B中，由A选项可知$BC\subset$平面ABC，所以$DA\perp BC$，

B为圆周上不与点A，C重合的点，

所以$BC\perp AB$，$AB\cap DA=A$，

所以$BC\perp$平面BAD，所以B正确；

C中，因为$AM\perp DC$于M，$AN\perp DB$于N，

由B选项分析，可得$AN\subset$平面BAD，

所以$BC\perp AN$，$BC\cap DB=N$，

所以$AN\perp$平面DBC，而$DC\subset$平面DBC，

所以$AN\perp DC$，而$AN\cap AM=A$，

所以$DC\perp$平面AMN，所以C正确；

D中，由C选项的分析，无法判断DB是否与MN，AM垂直，

所以无法判断面AMN与平面DAB是否垂直，所以D不正确.

故选：D.

由DA垂直于圆O所在的平面，所以DA所在的平面都与圆O所在的平面，判断出A的真假；再由圆的性质可得$BC\perp AB$，由A选项的分析，可得$BC\perp DA$，进而可证得$BC\perp$平面DAB，判断出B的真假；由B选项的分析，可得$AN\perp BC$，进而可证得$AN\perp$平面DAC，进而可证得$AN\perp CD$，再由$AM\perp DC$，进而可证得

$CD\perp$平面AMN，判断出C的真假；无法判断DB是否与MN，AM垂直，所以无法判断面AMN与平面DAB是否垂直，判断出D的真假.

本题考查线面垂直的判断定理的应用及线面垂直的性质定理的应用，属于中档题.

8.B

【解析】解：由三倍角公式有$cos54^\circ=4cos^3 18^\circ-3cos18^\circ=sin36^\circ=2sin18^\circ cos18^\circ$，

化简得$4cos^2 18^\circ-3=2sin18^\circ$，

$\therefore 4sin^2 18^\circ+2sin18^\circ-1=0$，

解得$sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$(负值舍去)，

$\therefore t=2sin18^\circ$.

故选：B.

结合已知三倍角公式及同角基本关系进行化简即可求解.

本题主要考查了同角基本关系的应用，属于基础题.

9.BD

【解析】解：A.若$\vec{a}//\vec{b}$，则$1+2\lambda=0$，解得$\lambda=-\frac{1}{2}$，A错误；

B.若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda-2=0$，$\lambda=2$，$B$正确；

C.$\lambda=-\frac{1}{2}<2$时，$\vec{a}=-2\vec{b}$，$\vec{a},\vec{b}$的夹角为π，不是钝角，C错误；

D.$\lambda=1$时，$\vec{b}=(1,1)$，$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量的坐标为：$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-1}{2}(1,1)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$D$正确.

故选：BD.

根据向量平行和垂直的坐标关系即可判断A，B的正误；根据向量夹角的定义及向量数量积的计算公式即可判断C的正误；根据投影向量的计算公式即可判断D的正误.

本题考查了向量垂直的充要条件，向量平行的坐标关系，向量坐标的数量积运算，向量数量积的计算公式，投影向量的计算公式，考查了计算能力，属于基础题.

10.ACD

【解析】解：对于A，因为$\frac{1}{z_1}=\frac{\bar{z_1}}{z_1\cdot\bar{z_1}}$为虚数，$z_1\cdot\bar{z_1}$为实数，所以$\bar{z_1}$为虚数，所以$z_1$也为虚数，所以$A$正确，

对于B，当$z_1=-2i$时，满足$|z_1+i|=1$，此时$|z_1|=2>\sqrt{2}$，所以B错误，

对于C，设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a,b,c,d\in R)$，则

$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

$z_1 \cdot \bar{z_2} = (a + bi) \cdot (c-di) = (ac + bd) + (bc-ad)i$，

所以$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$，

$|z_1 \cdot \bar{z_2}| = \sqrt{(ac + bd)^2 + (bc-ad)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}$，

所以$|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z_2}|$，所以 C 正确，

对于D，设z_1，z_2确定的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$，则由向量不等式得$|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}| \le |\overrightarrow{OZ_1}| + |\overrightarrow{OZ_2}|$，

所以$|z_1-z_2| \le |z_1| + |z_2|$恒成立，所以 D 正确，

故选：ACD.

对于A，由$\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z_1}}{z_1 \cdot \bar{z_1}}$为虚数，得$\bar{z_1}$为虚数，从而可判断$A$，对于$B$，由$z_1 = -2i$进行判断，对于$C$，设$z_1 = a + bi$，$z_2 = c + di(a,b,c,d \in R)$，然后分别求解$|z_1 z_2|$,$|z_1 \bar{z_2}|$进行判断，对于$D$，根据复数的向量表示及向量的不等式分析判断.

本题考查复数的运算，属于中档题.

11.AC

【解析】解：由$\frac{a+c}{b} = \frac{sinA-sinB}{sinA-sinC}$，结合正弦定理可得$\frac{a+c}{b} = \frac{a-b}{a-c}$，

即为$a^2 + b^2-c^2 = ab$，

由余弦定理可得$cosC = \frac{a^2 + b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$，

由$0 < C < \pi$，可得$C = \frac{\pi}{3}$，故 A 正确；

由$c = 2$，可得$a^2 + b^2-ab = 4$，

又$a^2 + b^2 \ge 2ab$，可得$ab \le 4$，当且仅当$a = b = 2$时，取得等号，

即ab的最大值为4，故 C 正确；

由$a^2 + b^2-ab = 4$，即$b^2-ab + a^2-4 = 0$有解，可得$\Delta = a^2-4(a^2-4) \ge 0$，解得$0 < a \le \frac{4}{3}\sqrt{3}$，故 B 错误；

由$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$，两边平方可得$\overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})$，

即为$CD^2 = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + 2ba \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + ab) = \frac{1}{4}(4 + 2ab) \le \frac{1}{4} \times (4 + 8) = 3$，

则$CD \le \sqrt{3}$，故 D 错误.

故选：AC.

由正弦定理和余弦定理可求得C，可判断A；由基本不等式可判断C；由二次方程有解的条件可判断B；由