专题 6.5 相似三角形的应用【七大题型】

【苏科版】

题型先知

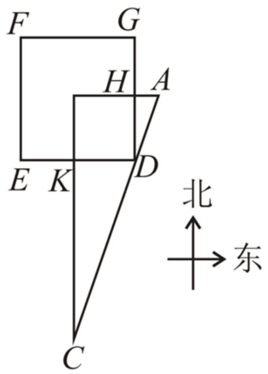
举一反三

【知识点 相似三角形的应用】

在实际生活中，我们面对不能直接测量物体的高度和宽度时，可以把它们转化为数学问题，建立相似三角形模型，再利用对应边的比相等来达到求解的目的。同时，需要掌握并应用一些简单的相似三角形模型。

【题型 1 相似三角形的应用（九章算术）】

【例 1】（2021·北京大兴·九年级期中）《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，在“勾股”章中有这样一个问题：“今有邑方二百步，各中开门，出东门十五步有木，问：出南门几步而见木？”用今天的话说，大意是：如图，$DEFG$ 是一座边长为 200 步（“步”是古代的长度单位）的正方形小城，东门 H 位于 GD 的中点，南门 K 位于 ED 的中点，出东门 15 步的 A 处有一树木，求出南门多少步恰好看到位于 A 处的树木（即点 D 在直线 AC 上）.



【答案】$\frac{2000}{3}$步

【分析】本题只需要证出$\triangle CDK\backsim\triangle DAH$，利用相似三角形的性质可以得到：$\frac{CK}{100}=\frac{100}{15}$，然后可以求出 CK 的值，得出答案.

【详解】解：由题意可知：$DE=DG=200$，$AH=15$

$\because H$ 为 GD 的中点，K 为 DE 的中点

$DH=100$，$DK=100$

$\because AH\parallel DK$

$\therefore\angle CDK=\angle A$

而$\angle CKD=\angle AHD$

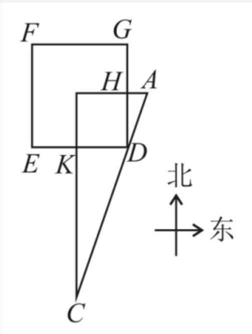
$\therefore\triangle CDK\backsim\triangle DAH$

$\therefore\frac{CK}{DH}=\frac{DK}{AH}$

即$\frac{CK}{100}=\frac{100}{15}$,

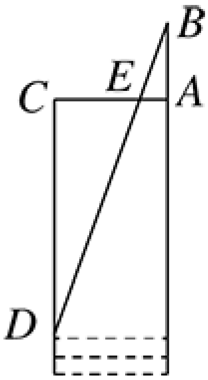
$\therefore CK=\frac{2000}{3}$

答：出南门$\frac{2000}{3}$步恰好看到位于 A 处的树木.



【点睛】本题考查了相似三角形的应用：本题需要把实际问题抽象到相似三角形中，利用视点和盲区的知识构建相似三角形，用相似三角形对应边成比例求出物体的高度.

【变式 1-1】（2022·湖南株洲·九年级期末）《九章算术》中记载了一种测量古井水面以上部分深度的方法．如图所示，在井口 A 处立一根垂直于井口的木杆 AB，从木杆的顶端 B 观察井水水岸 D，视线 BD 与井口的直径 AC 交于点 E，如果测得$AB=1$米，$AC=1.6$米，$AE=0.4$米，那么 CD 为（　　）米.



A．5　　　　B．4　　　　C．3　　　　D．2

【答案】C

【分析】由题意知：$\triangle ABE\backsim\triangle CDE$，得出对应边成比例即可得出 CD．

【详解】解：由题意知：$AB\parallel CD$，则$\angle BAE=\angle C$，$\angle B=\angle CDE$，

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle CDE$，

$\therefore\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CE}$，

$\therefore\frac{1}{CD}=\frac{0.4}{1.6-0.4}$，

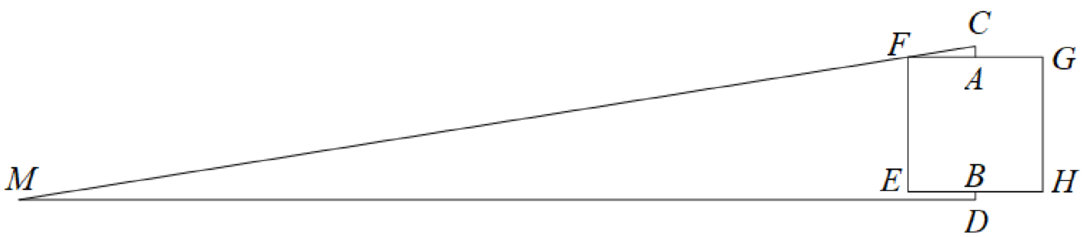
$\therefore CD=3$，

经检验，$CD=3$ 是所列方程的解，

故选：C．

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，根据题意得出△ABE∽△CDE 是解决问题的关键．

【变式 1-2】（2022·河北·二模）《九章算术》的“勾股”章中有这样一个问题：“今有邑方不知大小，各中开门．出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木．问邑方几何？”大意是：如图，四边形 $EFGH$ 是一座正方形小城，北门 A 位于 FG 的中点，南门 B 位于 EH 的中点．从北门出去正北方向 20 步远的 C 处有一树木，从南门出去向南行走 14 步，再向西行走 1775 步，恰好能看见 C 处的树木，则正方形小城的边长为（　　）



A．105 步　　　　B．200 步　　　　C．250 步　　　　D．305 步

【答案】C

【分析】此题文字叙述比较多，解题时首先要理解题意，找到相似三角形，利用相似三角形的性质解题，相似三角形的对应边成比例．

【详解】设小城的边长为 x 步，根据题意，

$Rt\triangle CAF\backsim Rt\triangle CDM$，

$\therefore \frac{CA}{CD}=\frac{FA}{MD}$，

即$\frac{20}{20+14+x}=\frac{0.5x}{1775}$，

去分母并整理，

得 $x^2+34x-71000=0$，

解得 $x_1=250$，$x_2=-284$（不合题意，舍去），

∴小城的边长为 250 步．

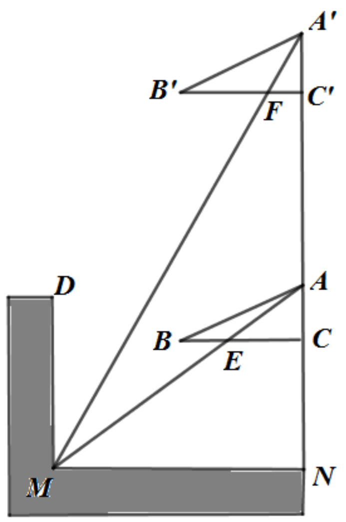
故选：C．

【点睛】本题只要是把实际问题抽象到相似三角形中，利用相似三角形的相似比，列出方程，通过解方程即可求出小城的边长．

【变式 1-3】（2021·河南·鹤壁市淇滨中学九年级阶段练习）《海岛算经》是中国最早的一部测量数学著作，由刘徽于三国魏景元四年（公元 263 年）所撰，本为《九章算术注》之第十卷，题为《重差》，所有问题都是利用两次或多次测望所得的数据来推算可望而不可及的目标的高、深、广、远，因首题测算海岛的高、远得名《海岛算经》，亦为地图学提供了数学基础．

《海岛算经》中的第 4 道“望谷”的题目为：今有望深谷，偃矩岸上，令勾高六尺．从勺端望谷底，入下股九尺一寸．又设重矩于上，其矩间相去三丈，更从勺端望谷底，入上股八尺五寸．问谷深几何？

大致意思是：望一个如图所示的深谷，深谷的底部为线段 MN，在山谷边缘处放置一个直角三角尺 ABC，$\angle ACB=90°$，$AC=6$ 尺，A，C，N 在一条直线上，$CN\perp MN$，从点 A 处望山谷底部 M 处时，视线经过 BC 上的点 E 处，测得 EC 长为 9 尺 1 寸；将三角尺沿着射线 CA 方向向上平移 3 丈得到 $\triangle A'B'C'$，从A'处望山谷底部 M 处时，视线经过$B'C'$上的点 F 处，测得FC'长为 8 尺 5 寸．求山谷深 CN 为几丈．（注：1 丈＝10 尺，1 尺＝10 寸）



【答案】山谷深 CN 为 41.9 丈.

【分析】根据题目中的条件，需要两次利用三角形相似的判定定理及性质，证明两个三角形相似，再利用对应边成比例建立等式，进行求解.

【详解】：解：由题意知：$AC=60$寸，$EC=91$寸，FC'＝85 寸，AA'＝300 寸.

$\because \angle EAC=\angle MAN, \angle ACE=\angle ANM$，

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ANM$.

$\therefore \frac{AC}{AN}=\frac{EC}{MN}$.

$\therefore \frac{60}{AN}=\frac{91}{MN}$.

$\therefore MN=\frac{91}{60}AN$.

$\because \angle FA'C'=\angle MA'N, \angle A'C'F=\angle ANM$，

$\therefore \triangle FA'C' \sim \triangle MA'N$.

$\therefore \frac{A'C'}{A'N}=\frac{FC'}{MN}$.

即$\frac{A'C'}{A'A+AN}=\frac{FC'}{MN}$.

$\therefore \frac{60}{300+AN}=\frac{85}{\frac{91}{60}AN}$，

解得：$AN=4250$

经检验：$AN=4250$符合题意，

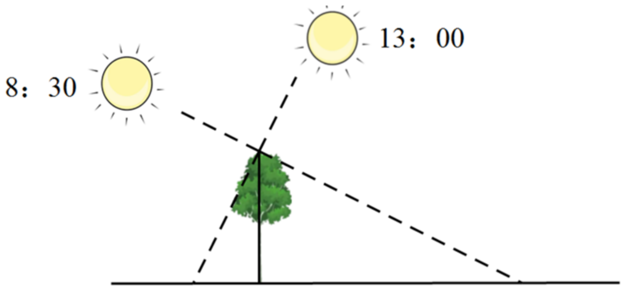
$\therefore CN=AN-AC=4190$寸＝41.9 丈.

答：山谷深 CN 为 41.9 丈.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定定理及性质，解题的关键是：熟练掌握相似三角形的判定定理及性质，根据对应边成比例建立等式，再通过等量代换进行求解.

【题型 2　相似三角形的应用（影长问题）】

【例 2】（2022·浙江金华·九年级期末）如图，小明在 8：30 测得某树的影长为 16m，13：00 时又测得该树的影长为 4m，若两次日照的光线互相垂直，则这棵树的高度为（　）

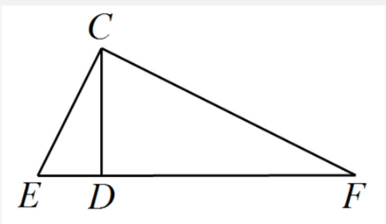


A．10m　　　　B．8m　　　　C．6m　　　　D．4m

【答案】B

【分析】根据题意，画出示意图，证明$\triangle EDC\backsim\triangle FDC$，进而可得$\frac{ED}{DC}=\frac{DC}{FD}$，即 $DC^2=ED\bullet FD$，代入数据可得答案.

【详解】解：根据题意，作$\triangle EFC$，树高为 CD，且$\angle ECF=90°$，$ED=4$m，$FD=16$m；



$\because\angle E+\angle F=90°$，$\angle E+\angle ECD=90°$，

$\therefore\angle ECD=\angle F$，

又$\angle CDE=\angle FDC$

$\therefore\triangle EDC\backsim\triangle CDF$，

$\therefore\frac{ED}{DC}=\frac{DC}{FD}$，即 $DC^2=ED\bullet FD=4\times16=64$，

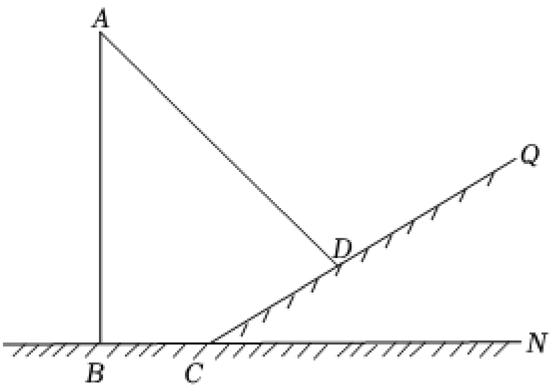
解得 $CD=8$m（负值舍去）.

故选：B.

【点睛】本题考查的是相似三角形的应用，熟知相似三角形的对应边成比例是解答此题的关键.

【变式 2-1】（2022·江苏徐州·中考真题）如图，公园内有一个垂直于地面的立柱 AB，其旁边有一个坡面

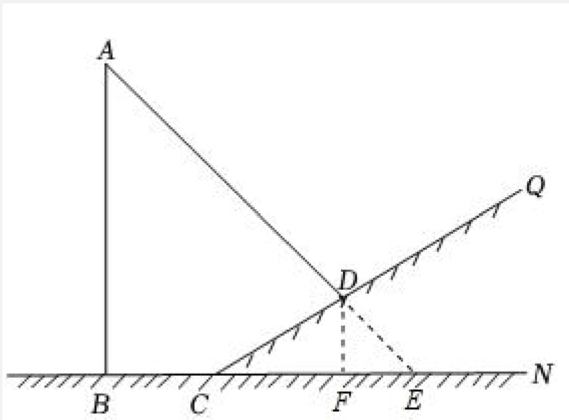
CQ，坡角$\angle QCN = 30°$．在阳光下，小明观察到在地面上的影长为120cm，在坡面上的影长为180cm．同一时刻，小明测得直立于地面长 60cm 的木杆的影长为 90cm（其影子完全落在地面上）．求立柱 AB 的高度．



【答案】$(170+60\sqrt{3})$cm

【分析】延长 AD 交 BN 于点 E，过点 D 作 $DF\perp BN$ 于点 F，根据直角三角形的性质求出 DF，根据余弦的定义求出 CF，根据题意求出 EF，再根据题意列出比例式，计算即可．

【详解】解：延长 AD 交 BN 于点 E，过点 D 作 $DF\perp BN$ 于点 F，



在 Rt△CDF 中，$\angle CFD$=90°，$\angle DCF$=30°，

则 $DF=\frac{1}{2}CD$=90（cm），$CF=CD$•cos$\angle DCF$=180×$\frac{\sqrt{3}}{2}$=$90\sqrt{3}$（cm），

由题意得：$\frac{DF}{EF}=\frac{60}{90}$，即$\frac{90}{EF}=\frac{60}{90}$，

解得：EF=135，

∴$BE=BC+CF+EF$=120+$90\sqrt{3}$+135=$(255+90\sqrt{3})$cm，

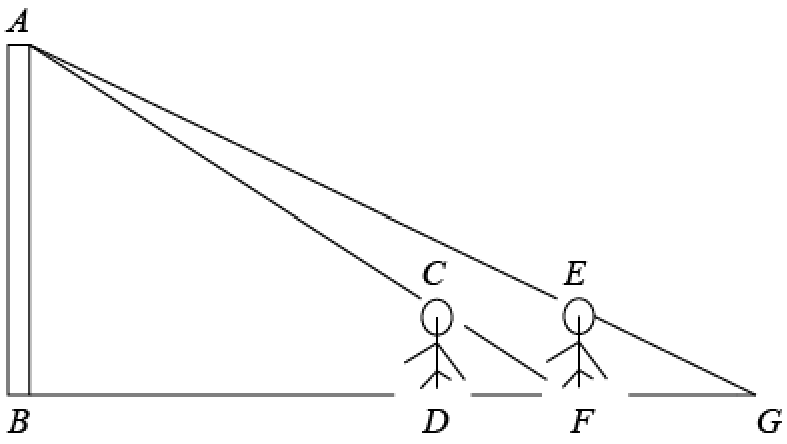
则$\frac{AB}{255+90\sqrt{3}}=\frac{60}{90}$，

解得：AB=170+$60\sqrt{3}$，

答：立柱 AB 的高度为$(170+60\sqrt{3})$cm．

【点睛】此题考查了解直角三角形的应用-坡度坡角问题、平行投影的应用，解题的关键是数形结合，正确作出辅助线，利用锐角三角函数和成比例线段计算.

【变式 2-2】（2022·江苏宿迁·九年级期末）如图，河对岸有一路灯杆AB，在灯光下，小明在点 D 处，自己的影长$DF=4\text{m}$，沿BD方向到达点 F 处再测自己的影长$FG=5\text{m}$，如果小明的身高为1.6m，求路灯杆AB的高度.



【答案】8m

【分析】在同一时刻物高和影长成正比，根据相似三角形的性质即可解答.

【详解】解：$\because CD\parallel EF\parallel AB$，

$\therefore$可以得到$\triangle ABF\backsim\triangle CDF$， $\triangle ABG\backsim\triangle EFG$，

$\therefore\frac{AB}{CD}=\frac{BF}{DF}$，$\frac{AB}{EF}=\frac{BG}{FG}$，

又$\because CD=EF$，

$\therefore\frac{BF}{DF}=\frac{BG}{FG}$

$\because DF=4$，$FG=5$，$BF=BD+DF=BD+4$，$BG=BD+DF+FG=BD+9$，

$\therefore\frac{4+BD}{4}=\frac{9+BD}{5}$，

$\therefore BD=16, BF=16+4=20$，

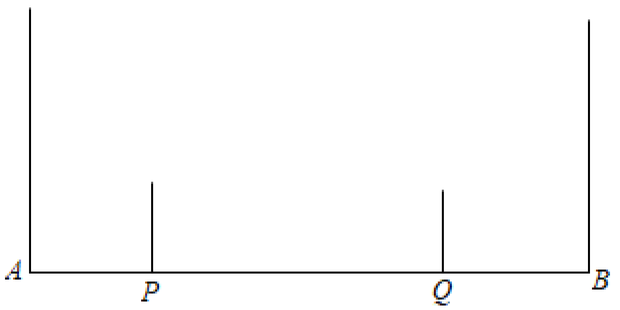
$\therefore\frac{AB}{1.6}=\frac{20}{4}$，

解得$AB=8$.

答：路灯杆AB的高度为8米.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的应用，本题只要是把实际问题抽象到相似三角形中，利用相似三角形的性质对应边成比例就可以求出结果.

【变式 2-3】（2022·黑龙江·大庆市庆新中学八年级期末）如图,小华在晚上由路灯 A 走向路灯 B，当她走到 P 点时,发现她身后影子的顶端刚好接触到路灯 A 的底部,当她向前再步行 12m 到 Q 点时，发现她身前影子的顶端刚好接触到路灯 B 的底部.已知小萌的身高是 1.6m，两路灯的高度都是 9.6m，且 $AP=QB=x$ m.



(1)求两路灯之间的距离.

(2)当小萌在 A，B 之间走动时，在两灯光下的影子长是变化的，那么两个影子的长的和变吗?请说明理由.

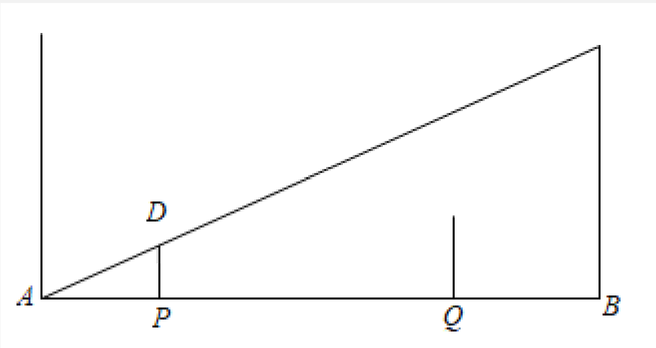
【答案】(1)18m

(2)两个影子的长的和不会变，一直都是 3.6m

【分析】（1）连接 AC，易证$\Delta APD\backsim\Delta ABC$，根据相似三角形对应边成比例即可求出 x 的值，两路灯间的距离等于 $PQ+2x$；

（2）根据题意作出图形，找出其中的相似三角形，根据三角形的相思笔即可求出影子的长度和.

（1）



如图，连接 AC，

$\because DP\perp AB$，$CB\perp AB$，

$\therefore DP\parallel CB$，

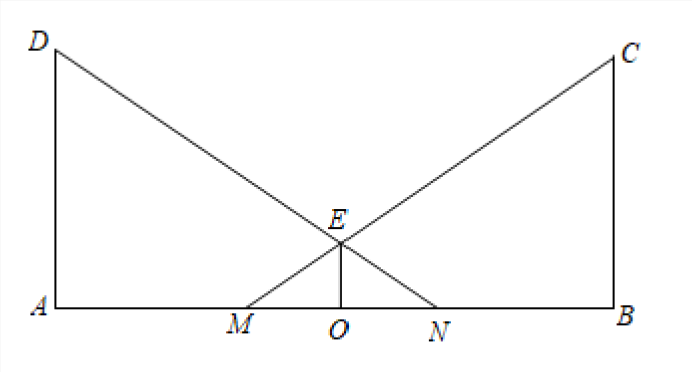
$\therefore\Delta APD\backsim\Delta ABC$，

$\therefore\frac{DP}{CB}=\frac{AP}{AB}$，即：$\frac{1.6}{9.6}=\frac{x}{2x+12}$，

解得：x=3，

∴AB=2×3+12=18（m）

（2）



如图，当小萌在 A，B 之间走动时，在 A 路灯下的影子长度为 ON，在 B 路灯下的影子长度为 OM，

∵$AD\perp AB$，$BC\perp AB$，$OE\perp OB$，

∴$AD\parallel OE\parallel BC$，

∴$\Delta AND\backsim\Delta ONE$，$\Delta BMC\backsim\Delta OME$，

∴$\frac{OE}{AD}=\frac{ON}{AN}$，$\frac{OE}{CB}=\frac{OM}{BM}$，

则$\frac{1.6}{9.6}=\frac{ON}{AN}$，$\frac{1.6}{9.6}=\frac{OM}{BM}$，整理得：$ON=\frac{1}{6}AN$，$OM=\frac{1}{6}BM$，

ON+OM=$\frac{1}{6}(AN+BM)$

MN=$\frac{1}{6}(AB+MN)$

由（1）得：AB=18m，

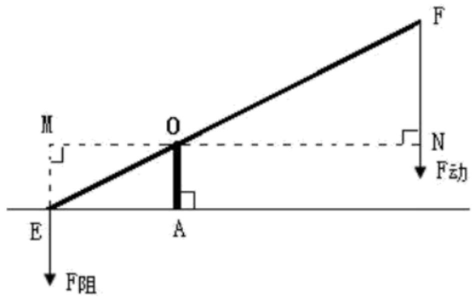
∴MN=$\frac{1}{6}(18+MN)$，解得：MN=3.6m，

故：两个影子的长的和不会变，一直都是 3.6m

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，要求学生能根据题意画出对应图形，能判定出相似三角形，以及能利用相似三角形的性质即相似三角形的对应边的比相等的原理解决求线段长的问题等，蕴含了数形结合的思想方法.

【题型 3　相似三角形的应用（杠杆问题）】

【例 3】（2022·山东临沂·二模）如图，EF 是一个杠杆，可绕支点 O 自由转动，若动力$F_{动}$和阻力$F_{阻}$的施力方向都始终保持竖直向下，当阻力$F_{阻}$不变时，则杠杆向下运动时$F_{动}$的大小变化情况是（　）



A．越来越小　　　　B．不变　　　　C．越来越大　　　　D．无法确定

【答案】B

【分析】由图证明$\triangle MOE \backsim \triangle NOF$，从而得到$\frac{ME}{NF}=\frac{MO}{NO}$，即$ME\cdot NO=NF\cdot MO$，再根据题意得出答案．

【详解】解：$\because\angle MOE=\angle NOF$，$\angle M=\angle ONF$，

$\therefore\triangle MOE\backsim\triangle NOF$，

$\therefore\frac{ME}{NF}=\frac{MO}{NO}$，即$ME\cdot NO=NF\cdot MO$，

$\because$阻力$F_{阻}$不变，即ME不变，

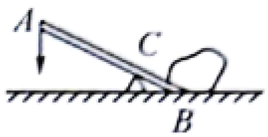
又$\because OM$，ON不变，

$\therefore$由$ME\cdot NO=NF\cdot MO$得，NF不变，即$F_{动}$的大小不变．

故选：B．

【点睛】本题以实际问题为背景，考查了相似三角形的判定与性质，从实际问题中抽离出数学图形，是解题的关键．

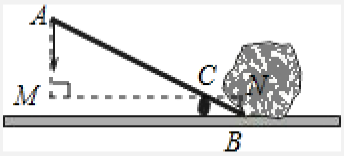
【变式3-1】（2019·全国·九年级专题练习）如图，是用杠杆撬石头的示意图，C是支点，当用力压杠杆的A端时，杠杆绕C点转动，另一端B向上翘起，石头就被撬动，现有一块石头，要使其滚动，杠杆B端必须向上翘$10cm$，已知杠杆上的AC与BC长度之比为5:1，则要使这块石头滚动，至少要将杠杆的A端向下压多少厘米？



【答案】50厘米

【分析】首先根据题意构造出相似三角形，然后根据相似三角形的对应边成比例求得端点A向下压的长度．

【详解】解：解：如图；AM、BN都与水平线垂直，即AM∥BN；



易知：△ACM∽△BCN；

$$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BN}$$

∵杠杆的动力臂 AC 与阻力臂 BC 之比为 5：1，

$\therefore \frac{AM}{BN}=\frac{5}{1}$，即 AM=5BN；

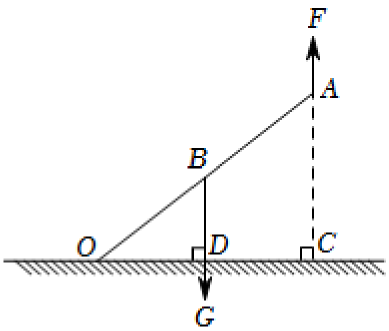
∴当 BN≥10cm 时，AM≥50cm；

故要使这块石头滚动，至少要将杠杆的端点 A 向下压 50cm．

故答案为 50

【点睛】本题考查相似三角形的判定与性质的实际应用，正确的构造相似三角形是解题的关键．

【变式 3-2】一根均匀的木棒 OA 所受重力 G=10N，小亮以木棒的一端 O 为支点，竖直向上将木棒的另一端 A 缓慢拉到如图所示的位置，保持不动，此时拉力为 F，若点 B 为 OA 的中点，AC，BD 分别垂直地面于点 C，D，则根据杠杆平衡原理得拉力 F 的大小为（　）



A．5N　　B．10N　　C．15N　　D．20N

【答案】A

【分析】依据 $BD\parallel AC$，B 是 AO 的中点，即可得到 D 是 OC 的中点，再根据杠杆平衡原理，可得 $G\times OD=F\times OC$，进而得出拉力 F 的大小．

【详解】解：∵$BD\perp OC$，$AC\perp OC$，

∴$BD\parallel AC$，

$\therefore \frac{OB}{BA}=\frac{OD}{DC}$，

又∵B 是 AO 的中点，即 $OB=BA$，

∴$OD=DC$，

$\therefore OD=\frac{1}{2}OC$，

根据杠杆平衡原理，可得 $G\times OD=F\times OC$，

$\therefore 10\times\frac{1}{2}OC=F\times OC$，

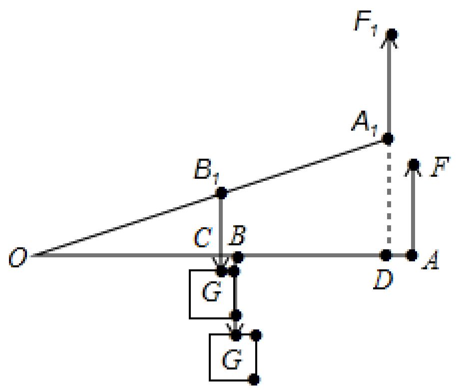
解得 F=5(N)，

故选：A.

【点睛】本题主要考查了平行线分线段成比例定理，以及杠杆平衡原理，熟练掌握平行线分线段成比例定理并准确识图是解题的关键.

【变式 3-3】（2021·甘肃白银·九年级期末）如图，以点 O 为支点的杠杆，在 A 端用竖直向上的拉力将重为 G 的物体匀速拉起，当杠杆 OA 水平时，拉力为 F；当杠杆被拉至 OA_1 时，拉力为 F_1，过点 B_1 作 $B_1C\perp OA$，过点 A_1 作 $A_1D\perp OA$，垂足分别为点 C、D．在下列结论中：

①$\triangle OB_1C\backsim\triangle OA_1D$；②OA•OC=OB•OD；③OC•G=OD•$F_1$；④F=$F_1$，正确的是（　）



A．①②④　　B．②③④　　C．①②③　　D．①②③④

【答案】D

【分析】根据在同一平面内，垂直于同一直线的两直线互相平行判断出 $B_1C\parallel A_1D$，然后求出$\triangle OB_1C\backsim\triangle OA_1D$，判断出①正确；

根据相似三角形对应边成比例列式求解即可得到②正确；

根据杠杆平衡原理：动力×动力臂=阻力×阻力臂列式判断出③正确；

求出 F 的大小不变，判断出④正确.

【详解】$\because B_1C\perp OA$，$A_1D\perp OA$，

$\therefore B_1C\parallel A_1D$，

$\therefore\triangle OB_1C\backsim\triangle OA_1D$，故①正确；

$\therefore\frac{OC}{OD}=\frac{OB_1}{OA_1}$，

由旋转的性质得，$OB=OB_1$，$OA=OA_1$，

∴$OA•OC=OB•OD$，故②正确；

由杠杆平衡原理，$OC•G=OD•F_1$，故③正确；

∴$\frac{F_1}{G}=\frac{OC}{OD}=\frac{OB_1}{OA_1}=\frac{OB}{OA}$是定值，

∴F_1的大小不变，

∴$F=F_1$，故④正确.

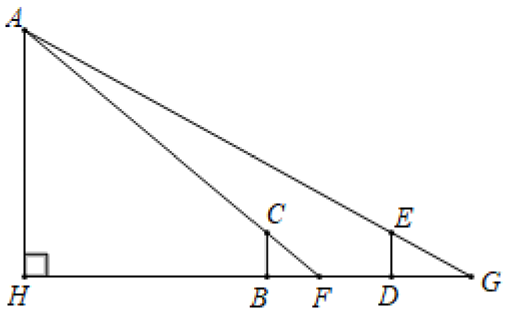
综上所述，说法正确的是①②③④.

故选：D.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，杠杆平衡原理，熟练掌握相似三角形的判定方法和性质并准确识图是解题的关键.

【题型 4　相似三角形的应用（建筑物问题）】

【例 4】（2019·四川·成都市双流区立格实验学校九年级阶段练习）刘徽，公元 3 世纪人，是中国历史上最杰出的数学家之一．《九章算术注》和《海岛算经》是他留给后世最宝贵的数学遗产．《海岛算经》第一个问题的大意是：如图，要测量海岛上一座山峰 A 的高度 AH，立两根高 3 丈的标杆 BC 和 DE，两杆之间的距离 BD＝1000 步，点 D、B、H 成一线，从 B 处退行 123 步到点 F 处，人的眼睛贴着地面观察点 A，点 A、C、F 也成一线，从 DE 退行 127 步到点 G 处，从 G 观察 A 点，A，E，G 三点也成一线，试计算山峰的高度 AH 及 BH 的长（这里古制 1 步＝6 尺，1 里＝180 丈＝1800 尺＝300 步，结果用步来表示）．



【答案】AH 为 1255 步，HB 为 30750 步

【分析】根据题意得出△FCB∽△FAH，△EDG∽△AHG，进而利用相似三角形的性质求出即可.

【详解】解：由题意，得，AH⊥HG，CB⊥HG，

∴∠AHF＝90°，∠CBF＝90°，

∴∠AHF＝∠CBF，

∵∠AFB＝∠CFB，

∴△CBF∽△AHF，

∴$\frac{BC}{AH}=\frac{BF}{HF}$

同理可得$\frac{DE}{HA}=\frac{DG}{HG}$

∵BF＝123，BD＝1000，DG＝127，

∴HF＝HB+123，HG＝HB+1000+127＝HB+1127，BC＝DE＝3 丈＝3×$\frac{5}{3}$＝5 步，

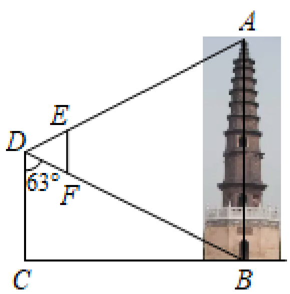
∴$\frac{5}{HA}=\frac{123}{HB+123}$，$\frac{5}{HA}=\frac{127}{HB+1127}$

解得 HB＝30750，HA＝1255 步，

答：AH 为 1255 步，HB 为 30750 步．

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，解题的关键是掌握相似三角形的判定和性质．

【变式 4-1】（2022·陕西·武功县教育局教育教学研究室一模）千佛铁塔位于陕西省咸阳市之北杜镇，用纯铁铸成，中空有梯可攀登，四角柱铸成金刚力士像，顶立层楼，各层环周铸铁佛多尊，故名“千佛塔”，此塔为中国现存铁塔中最高的一座．某数学兴趣小组本着用数学知识解决实际问题的想法，欲测量该塔的高度．如图，在点 C 处有一建筑物，小丽同学站在建筑物上，眼睛位于点 D 处，她手拿一支长 0.5 米的竹竿 EF，边观察边移动竹竿（竹竿 EF 始终与地面垂直），当移动到如图所示的位置时，眼睛 D 与竹竿、塔的顶端 E、A 共线，同时眼睛 D 与它们的底端 F、B 也恰好共线，此时测得$\angle BDC=63°$，小丽的眼睛距竹竿的距离为 0.5 米，小丽的眼睛距地面的高度$CD=17$米，已知$AB\perp BC$，$DC\perp BC$．请你根据以上测量结果计算该塔的高度 AB．【参考数据：$\tan63°\approx2$】



【答案】该塔的高度 AB 为 34 米

【分析】过点 D 作$DG\perp AB$于点 G，交 EF 于点 H，再根据 $EF\parallel AB$ 可得出$\triangle DAB\backsim\triangle DEF$，由相似三角形的对应边成比例即可求出 AB 的长．

【详解】过点 D 作$DG\perp AB$于点 G，交 EF 于点 H，如图．