

## 第五章 线性系统的频域分析与校正

### 练习题及答案—2

5—12 已知  $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$  和  $G_3(s)$  均为最小相角传递函数, 其近似对数幅频特性曲线如图5—79所示。试概略绘制传递函数

$$G_4(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}$$

的对数幅频、对数相频和幅相特性曲线。

解: (1)  $\because L_1(\omega) = 20 \lg K_1 = 45.11$

$\therefore K_1 = 180$

则:

$$G_1(s) = K_1$$

(2) 
$$G_2(s) = \frac{K_2}{s(\frac{s}{0.8} + 1)}$$

$$20 \lg K_2 / \omega = 20 \lg \frac{K_2}{1} = 0, \quad K_2 = 1$$

(3)  $\because L_3(\omega) = 20 \lg \omega K_3 = 20 \lg 0.111 K_3 = 0$

$\therefore K_3 = \frac{1}{0.111} = 9, \quad G_3(s) = K_3 s = 9s$

(4)  $\because G_4(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_3}$

将  $G_1, G_2, G_3$  代入得:  $G_4(s) = \frac{18}{s(0.125s + 1)}$

对数频率特性曲线如图解5—12 (a) 所示, 幅相特性曲线如图解5—12 (b) 所示:

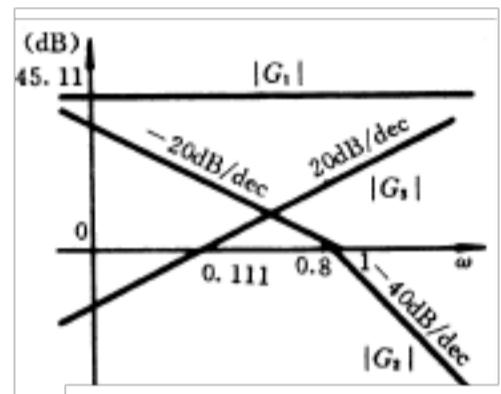
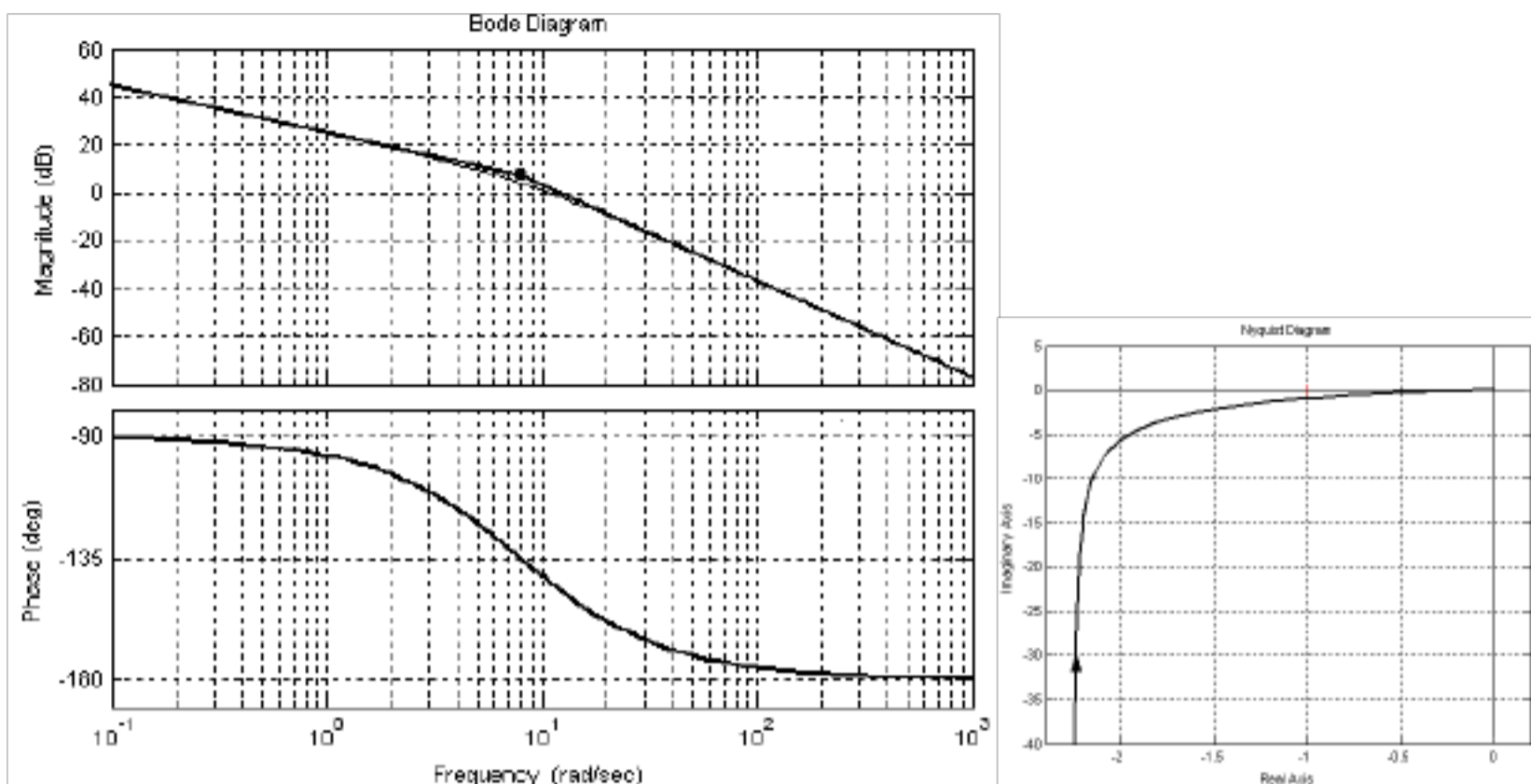


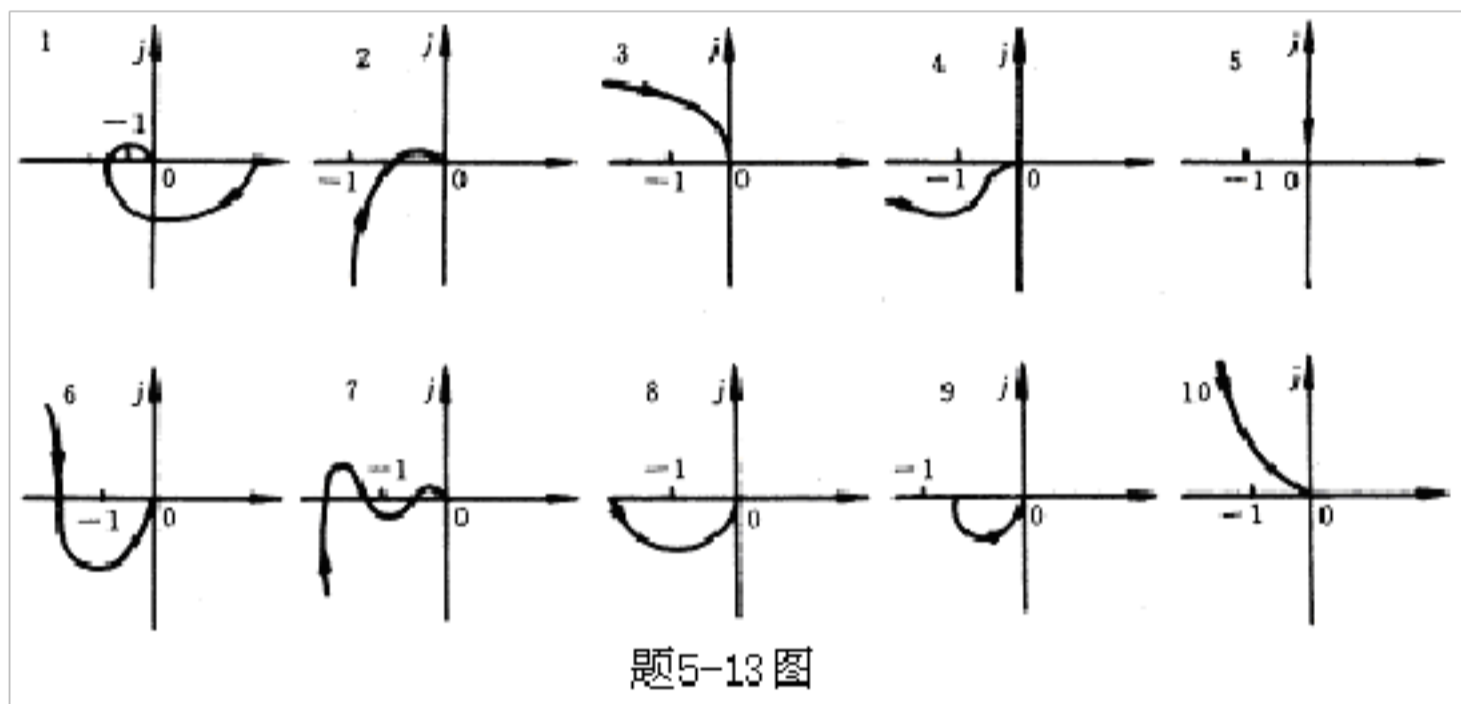
图5-79 5-12题图



图解5—12 (a) Bode图

(b) Nyquist图

5-13 试根据奈氏判据，判断题5—80图(1) ~ (10) 所示曲线对应闭环系统的稳定性。已知曲线(1) ~ (10) 对应的开环传递函数如下(按自左至右顺序)。



题5-13图

解 题5-13计算结果列表

题号	开环传递函数	$P$	$N$	$Z = P - 2N$	闭环稳定性	备注
1	$G(s) = \frac{K}{(Ts+1)(Ts+1)(Ts+1)}$	0	-1	2	不稳定	
2	$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(Ts+1)}$	0	0	0	稳定	
3	$G(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$	0	-1	2	不稳定	

4	$G(s) = \frac{K(Ts+1)}{s^2(Ts+1)}$ ( $T_1 > T_2$ )	0	0	0	稳定
5	$G(s) = \frac{K}{s^3}$	0	-1	2	不稳定
6	$G(s) = \frac{K(Ts+1)(Ts+1)}{s^3}$	0	0	0	稳定
7	$G(s) = \frac{K(Ts+1)(Ts+1)}{s(Ts+1)(Ts+1)(Ts+1)(Ts+1)}$	0	0	0	稳定
8	$G(s) = \frac{K}{Ts-1}$ ( $K > 1$ )	1	1/2	0	稳定
9	$G(s) = \frac{K}{Ts-1}$ ( $K < 1$ )	1	0	1	不稳定
10	$G(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$	1	-1/2	2	不稳定

5-14 已知系统开环传递函数，试根据奈氏判据，确定其闭环稳定的条件：

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}; \quad (K, T > 0)$$

(1)  $T = 2$  时， $K$  值的范围；

(2)  $K = 10$  时， $T$  值的范围；

(3)  $K, T$  值的范围。

$$\text{解 } G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(1+jT\omega)} = \frac{-K[(1+T)\omega + j(1-T\omega^2)]}{\omega(1+\omega^2)(1+T^2\omega^2)} = X(\omega) + Y(\omega)$$

令  $Y(\omega) = 0$ ，解出  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T}}$ ，代入  $X(\omega)$  表达式并令其绝对值小于 1

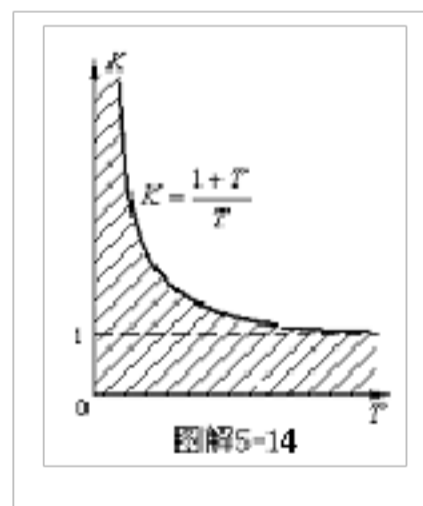
$$\left| X\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \right| = \frac{KT}{1+T} < 1$$

得出：  $0 < K < \frac{1+T}{T}$  或  $0 < T < \frac{1}{K-1}$

(1)  $T = 2$  时， $0 < K < \frac{3}{2}$ ；

(2)  $K = 10$  时， $0 < T < \frac{1}{9}$ ；

(3)  $K, T$  值的范围如图解 5-14 中阴影部分所示。



5-15 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10(s^2 - 2s + 5)}{(s+2)(s-0.5)}$$

试概略绘制幅相特性曲线，并根据奈氏判据判定闭环系统的稳定性。

解 作出系统开环零极点分布图如图解5—15 (a)所示。 $G(j\omega)$ 的起点、终点为：

$$G(j0) = 50 \angle 180^\circ$$

$$G(j\infty) = 10 \angle 0^\circ$$

$G(j\omega)$ 与实轴的交点：

$$G(j\omega) = \frac{10(5 - \omega^2 - j2\omega)}{(2 + j\omega)(-0.5 + j\omega)}$$

$$= \frac{10 \left[ (5 - \omega^2)(1 + \omega^2) + 3\omega^2 + j\omega(-5.5 + 3.5\omega^2) \right]}{(1 + \omega^2)^2 + (1.5\omega)^2}$$

令  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$  可解出

$$\omega_0 = \sqrt{5.5/3.5} = 1.254$$

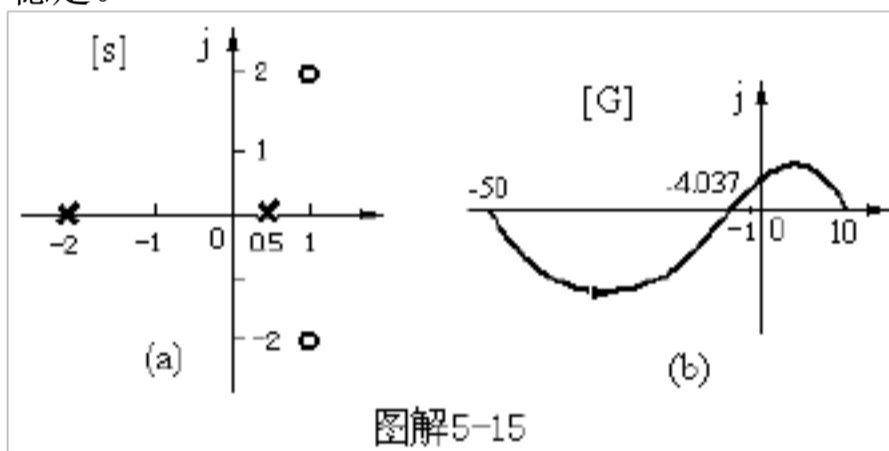
代入实部

$$\text{Re}[G(j\omega_0)] = -4.037$$

概略绘制幅相特性曲线如图解5—15 (b)所示。根据奈氏判据有

$$Z = P - 2N = 1 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = 2$$

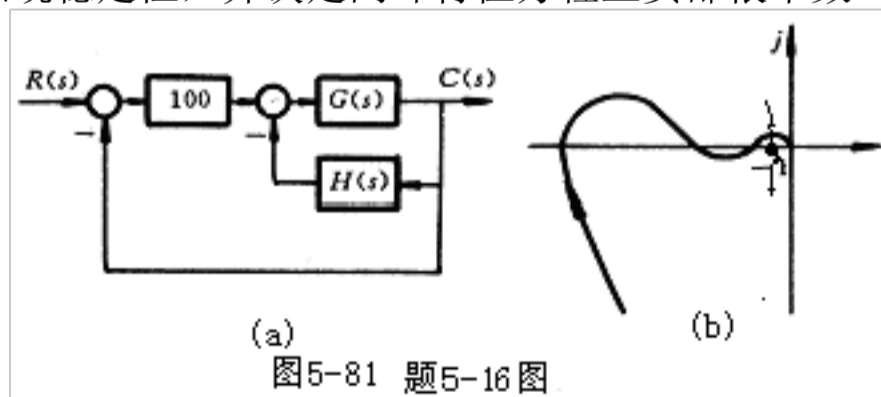
所以闭环系统不稳定。



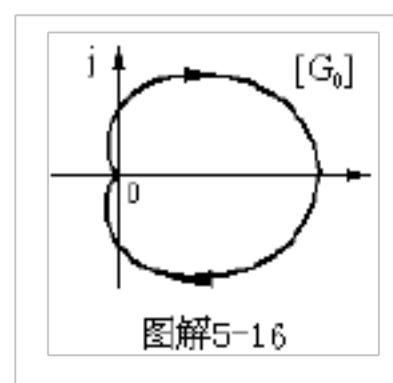
5—16 某系统的结构图和开环幅相曲线如图5-81 (a)、(b)所示。图中

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}, \quad H(s) = \frac{s^3}{(s+1)^2}$$

试判断闭环系统稳定性，并决定闭环特征方程正实部根个数。



解 内回路开环传递函数： $G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{s^2}{(s+1)^4}$



$$G(j0) = 0 \angle 0$$

$$G(j0+) = 0 \angle 180^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

大致画出  $G_0(j\omega)$  的幅相曲线如图解5-16所示。可见  $G_0(j\omega)$  不会包围  $(-1, j0)$  点。

$$\therefore Z_0 = P_0 - 2N_0 = 0 - 2 \times 0 = 0$$

即内回路小闭环一定稳定。内回路小闭环极点（即开环极点）在右半S平面的个数为0。

$$P = Z_0 = 0$$

由题5-16图 (b) 看出：系统开环频率特性包围  $(-1, j0)$  点的圈数  $N=-1$ 。根据劳斯判据

$$Z = P - 2N = Z_1 - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

系统不稳定，有两个闭环极点在右半S平面。

5-17 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s^2 + 0.8s - 1)}$$

试根据奈氏判据确定闭环系统的稳定性。

解 作出系统开环零极点分布图如图解5-17(a)所示。

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1 + j0.2\omega)(1 - j\omega)} = \frac{10[0.8\omega - j(1 + 0.2\omega^2)]}{\omega(1 + \omega^2)(1 + 0.04\omega^2)}$$

$G(j\omega)$  的起点、终点为：

$$G(j0) = \infty \angle -180^\circ$$

$$G(j0+) = \infty \angle -270^\circ$$

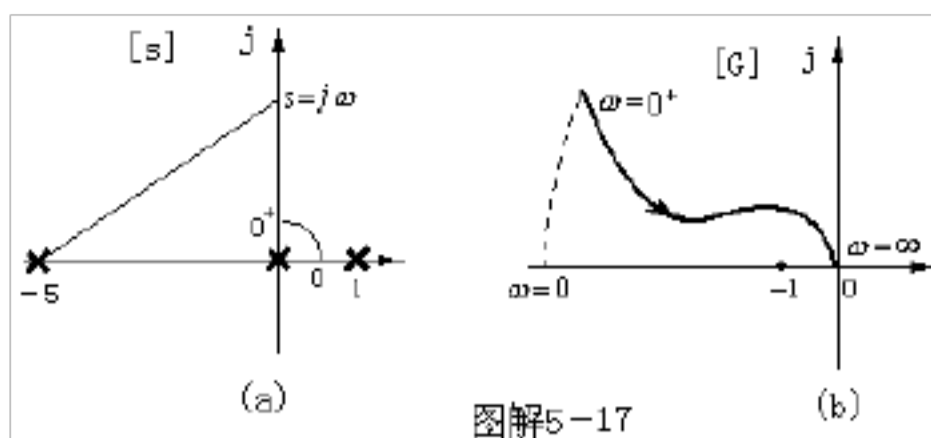
$$G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = -8$$

幅相特性曲线  $G(j\omega)$  与负实轴无交点。由于惯性环节的时间常数  $T_1 = 0.2$ ，小于不稳定惯性环节的时间常数  $T_2 = 1$ ，故  $\varphi(\omega)$  呈现先增大后减小的变化趋势。绘出幅相特性曲线如图解5-17 (b) 所示。根据奈氏判据

$$Z = P - 2N = 1 - 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = 2$$

表明闭环系统不稳定。



图解5-17

5—18 已知单位反馈系统的开环传递函数，试判断闭环系统的稳定性。

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(\frac{s^2}{4} + 1)}$$

解 作出系统开环零极点分布图如图解5-18(a)所示. 当  $\omega = 0 \rightarrow \infty$  变化时,  $G(j\omega)$  的变化趋势:

$$G(j0) = \infty \angle 0^\circ$$

$$G(j0+) = \infty \angle -90^\circ$$

$$G(j2-) = \infty \angle -153.4^\circ$$

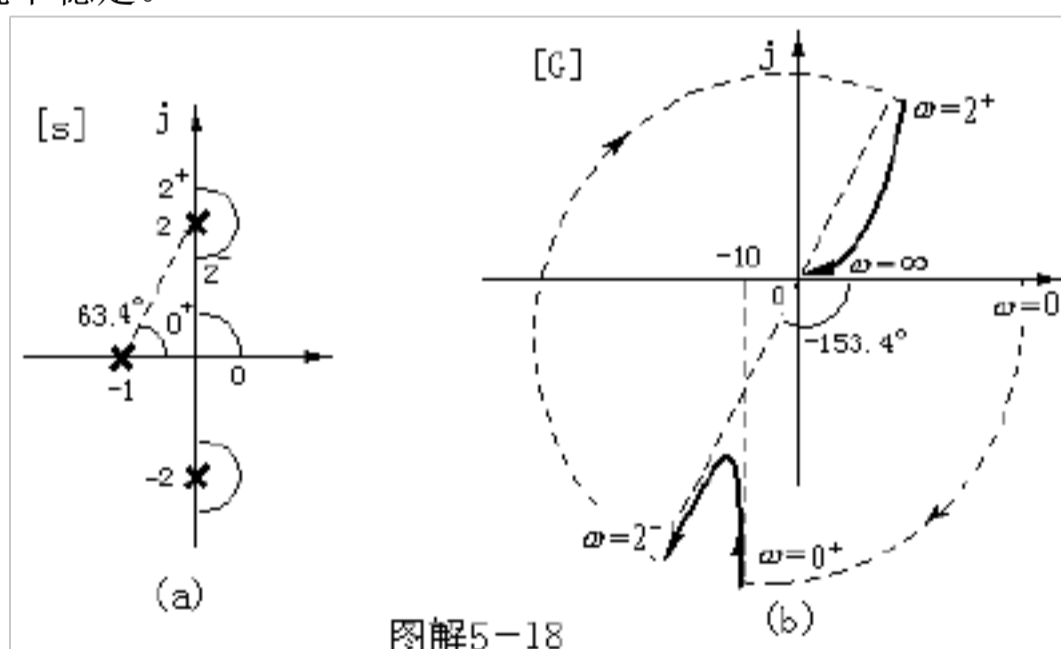
$$G(j2+) = \infty \angle -333.4^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -360^\circ$$

绘出幅相特性曲线  $G(j\omega)$  如图解5—18(b) 所示. 根据奈氏判据

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

表明闭环系统不稳定。



图解5-18

5—19 已知反馈系统，其开环传递函数为

$$(1) \quad G(s) = \frac{100}{s(0.2s+1)}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)}$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

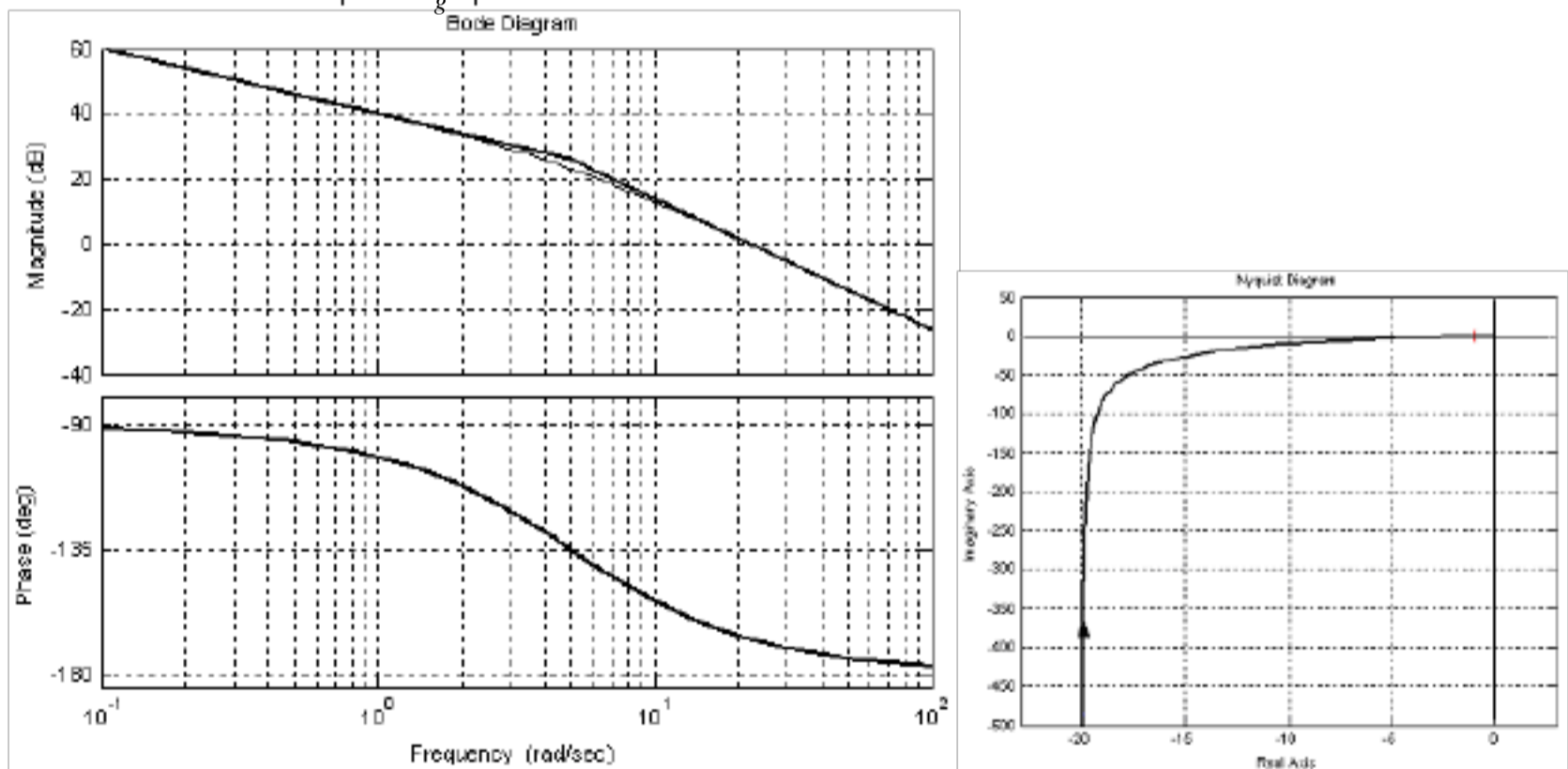
试用奈氏判据或对数稳定判据判断闭环系统的稳定性, 并确定系统的相角裕度和幅值裕度.

解 (1)  $G(s) = \frac{100}{s(0.2s+1)} = \frac{100}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)}$

画Bode图得: 
$$\begin{cases} \omega_c = \sqrt{5 \times 100} = 22.36 \\ \omega_g = \infty \end{cases}$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega) = 180^\circ - 90^\circ - \text{tg}^{-1}0.2\omega_c = 12.6^\circ$$

$$h = \frac{1}{|G(\omega_g)|} = \infty$$



图解5—19 (1) Bode图

Nyquist图

$$(2) \quad G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)} = \frac{50}{\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)(2s+1)}$$

画Bode图判定稳定性:  $Z=P-2N=0-2 \times (-1) = 2$  系统不稳定。

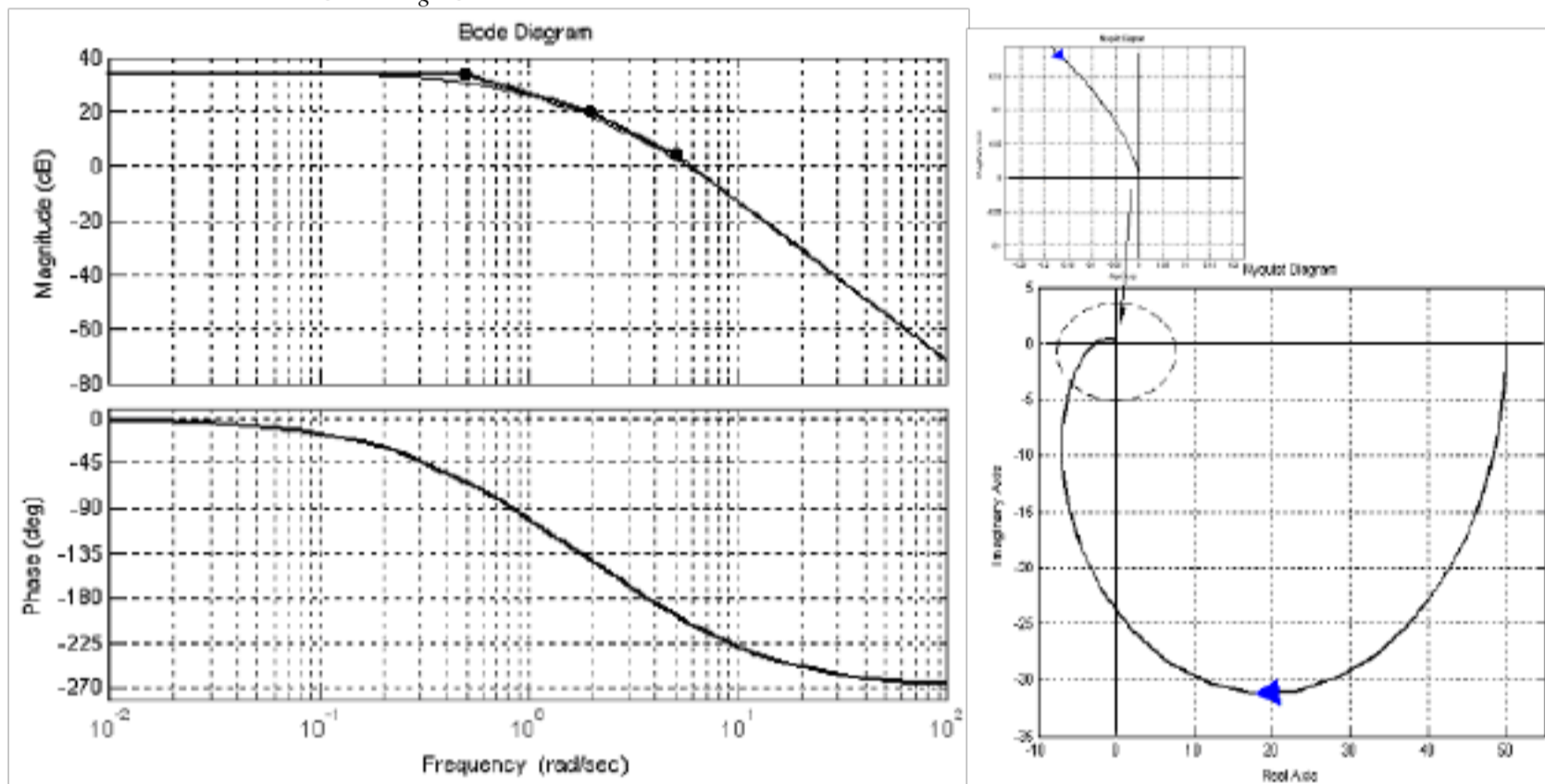
由Bode图得:  $\omega_c > 6$

$$\text{令: } |G(j\omega_c)| = 1 \approx \frac{50}{\frac{\omega_c}{5} \cdot \frac{\omega_c}{2} \cdot 2\omega_c} \quad \text{解得 } \omega_c = 6.3$$

$$\text{令: } \angle G(j\omega_g) = \text{tg}^{-1} \frac{\omega_g}{5} - \text{tg}^{-1} \frac{\omega_g}{2} - \text{tg}^{-1} 2\omega_g = -180^\circ \quad \text{解得 } \omega_g = 3.7$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega) = 180^\circ - \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{5} - \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{2} - \text{tg}^{-1} 2\omega = -29.4^\circ$$

$$h = \frac{1}{|G(\omega_g)|} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega_g}{5})^2 + 1} \sqrt{(\frac{\omega_g}{2})^2 + 1} \sqrt{(2\omega_g)^2 + 1}} = 0.391$$



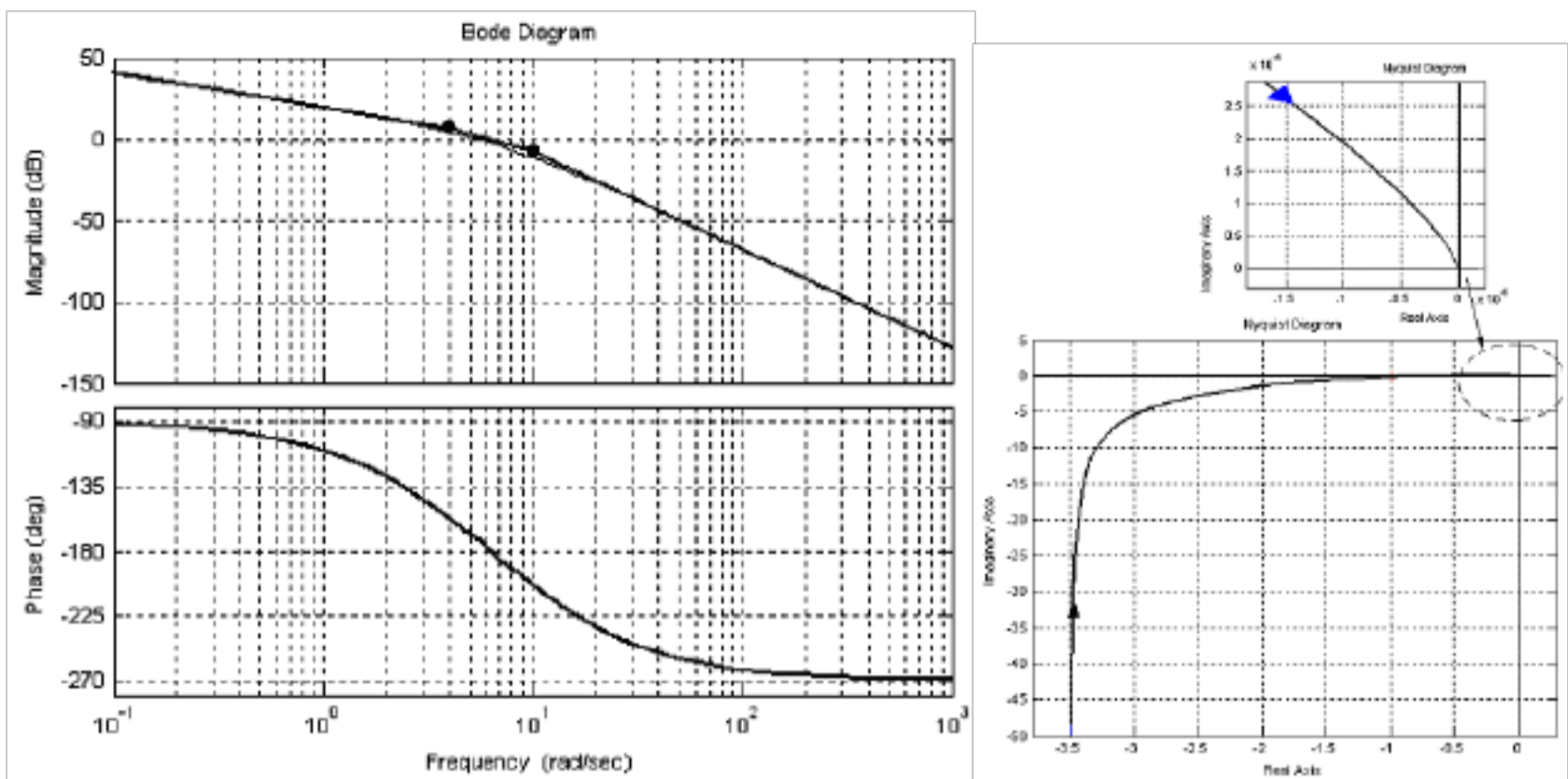
图解5-19 (2) Bode图

Nyquist图

$$(3) \quad G(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.25s+1)} = \frac{10}{s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{4}+1)}$$

$$\text{画Bode图得: } \begin{cases} \omega_c = \sqrt{4 \times 10} = 6.325 \\ \omega_g = \sqrt{4 \times 10} = 6.325 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 0^\circ \\ h = 1 \end{cases} \quad \text{系统临界稳定。}$$





图解5—19 (3) Bode图

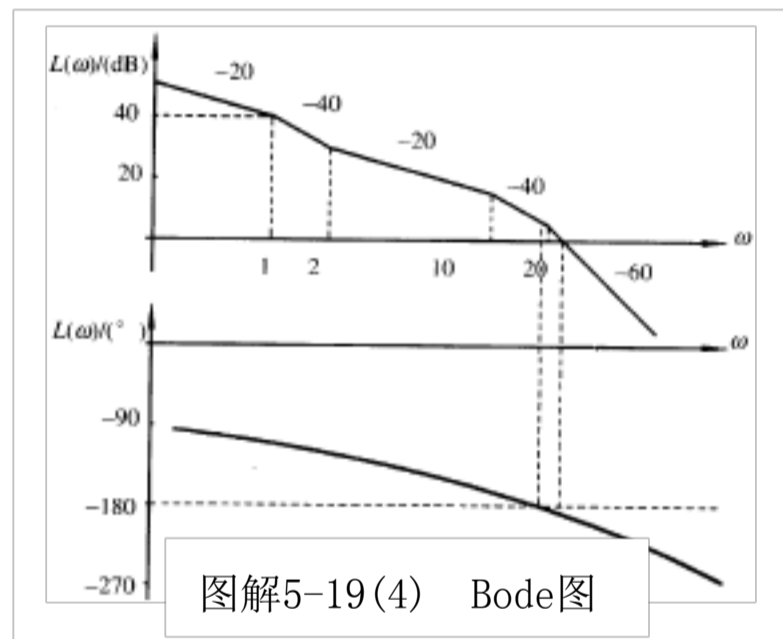
Nyquist图

$$(4) \quad G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{20} + 1\right)}$$

画Bode图得:

$$\begin{cases} \omega_c = 21.5 \\ \omega_g = 13.1 \\ \gamma = 180^\circ + \angle\varphi(\omega_c) = -24.8^\circ \\ h = 0.343 = -9.3(\text{dB}) \end{cases}$$

系统不稳定。



图解5-19(4) Bode图

5-20 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

试确定相角裕度为 $45^\circ$  时的  $\alpha$  值。

解

$$G(j\omega) = \frac{\sqrt{1+(a\omega)^2}}{\omega^2} \angle(\text{tg}^{-1}a\omega - 180^\circ)$$

开环幅相曲线如图所示。以原点为圆心作单位圆，在A点：

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1+a^2\omega^2}}{\omega^2} = 1$$

即：

$$\omega_c^4 = a^2\omega_c^2 + 1 \quad (1)$$

要求相位裕度  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 45^\circ$

即:  $\varphi(\omega_c) = \operatorname{tg}^{-1} a \omega_c - 180^\circ = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$

$$\therefore a \omega_c = 1 \quad (2)$$

联立求解(1)、(2)两式得:  $\omega_c = 1.19$ ,  $a = 0.84$ 。

5-21 在已知系统中

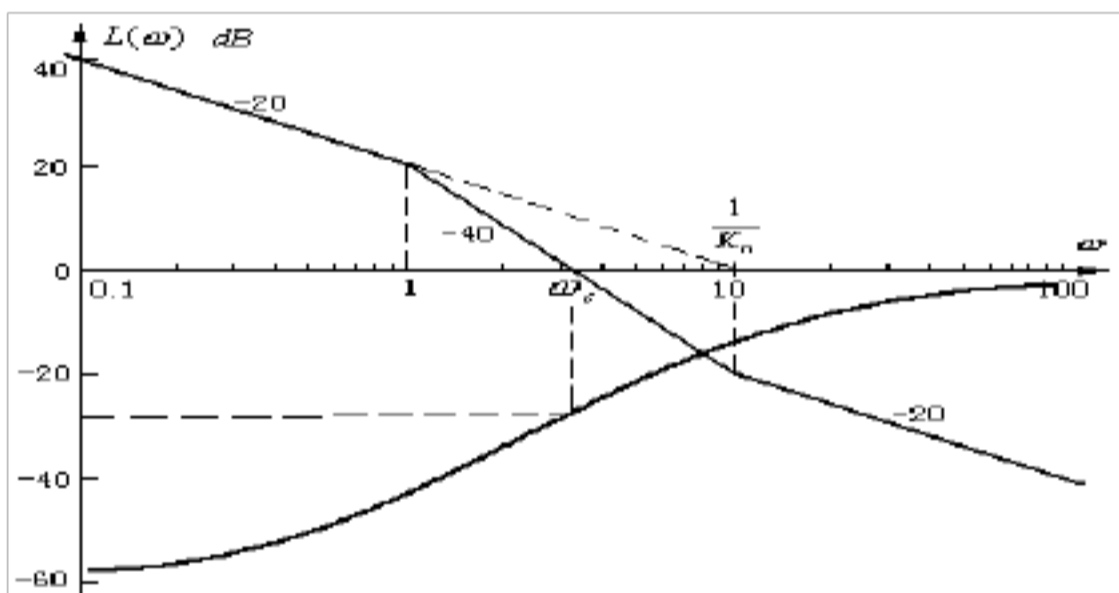
$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)}, \quad H(s) = 1 + K_h s$$

试确定闭环系统临界稳定时的  $K_h$ 。

解 开环系统传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10(1 + K_h s)}{s(s-1)}$$

解法(一): 画伯特图如图解5-21所示



图解5-21

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(K_h j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 1)}$$

临界稳定时  $\varphi(\omega_c) = -90^\circ - 180^\circ + \operatorname{tg}^{-1} \omega_c + \operatorname{tg}^{-1} K_h \omega_c = -180^\circ$

$$\operatorname{tg}^{-1} \omega_c + \operatorname{tg}^{-1} K_h \omega_c = 90^\circ$$

$$\frac{\omega_c + K_h \omega_c}{1 - \omega_c K_h \omega_c} = \infty$$

$$1 - K_h \omega_c^2 = 0$$

$$K_h = \frac{1}{\omega_c^2}$$

由Bode图

$$\omega_c = 3.16$$

$$\therefore K_h \approx 0.1$$

法(二)  $\therefore G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(1+K_h j\omega)}{j\omega(j\omega-1)} = u(\omega) + jv(\omega)$

$$u(\omega) = \frac{10\omega(1+K_h)}{-\omega(\omega^2+1)} \quad ; \quad v(\omega) = \frac{10(K_h\omega^2-1)}{-\omega(\omega^2+1)}$$

令  $v(\omega) = 0$  , 则  $10(K_h\omega^2-1) = 0 \quad \therefore \omega^2 = 1/K_h$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{1}{K_h}} \quad (1)$$

又令  $u(\omega) = \frac{10\omega(1+K_h)}{-\omega(\omega^2+1)} = -1$

代入(1)得:  $10(1+K_h) = (\frac{1}{K_h} + 1)$

$$10K_h^2 + 9K_h - 1 = 0$$

解出:  $K_h = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{20} \quad \therefore K_h = \frac{1}{10} \quad , K_h = -1$  (舍去)。

故当  $\omega = \sqrt{10}$  1/秒,  $K_h = 1/10$  时, 系统临界稳定。

5—22 若单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$ , 试确定使系统稳定的K的临界值。

解  $\therefore G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega} e^{-j0.8\omega}$

幅频特性为  $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}$

相频特性为  $\varphi(\omega) = \angle e^{-j0.8\omega} + \angle \frac{1}{1+j\omega} = -0.8\omega + \text{tg}^{-1}(-\omega)$

求幅相特性通过  $(-1, j0)$  点时的K值

即  $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \quad (1)$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -0.8\omega - \text{tg}^{-1}\omega = -\pi \quad (2)$$

由(2)式  $\text{tg}^{-1}\omega = \pi - 0.8\omega$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}\omega) &= \operatorname{tg}(\pi - 0.8\omega) = -\operatorname{tg}0.8\omega \\ \therefore \omega &= -\operatorname{tg}0.8\omega \end{aligned}$$

代入(1)：

$$\frac{K}{\sqrt{1+[\operatorname{tg}(0.8\omega)]^2}} = 1$$

$$\therefore K = \sqrt{1+[\operatorname{tg}(0.8\omega)]^2} = \sec 0.8\omega$$

解出：

$$\omega_c = 2.45, \quad K = 2.65$$

5—23 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定的延迟时间  $\tau$  的范围。

解 令

$$|G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(1+\omega^2)^2} = 1 \quad (1)$$

)

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ - \tau\omega \frac{180}{\pi} - 4\operatorname{tg}^{-1}\omega = 180^\circ \quad (2)$$

由(1)：

$$1 + \omega^2 = \sqrt{5}\omega$$

解得：

$$\omega_1 = 1.618, \quad \omega_2 = 0.618 \text{ (舍去)}$$

将  $\omega = 0.618$  代入(2)式：

$$\tau\omega \cdot \frac{180}{\pi} = 360^\circ - 4\operatorname{tg}^{-1}\omega$$

解得： $\tau = 1.3686$ ，由图可见：当  $\tau < 1.3686$  时， $G(j\omega)$  不包围  $(-1, j0)$  点，所以  $\tau$  的稳定范围是：

$$0 < \tau < 1.3686$$

5—24 某最小相角系统的开环对数幅频特性如图5—82所示。要求

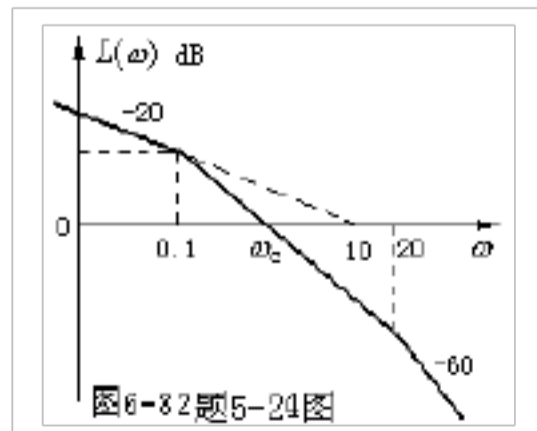
- (1) 写出系统开环传递函数；
- (2) 利用相角裕度判断系统的稳定性；
- (3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程，试讨论对系统性能的影响。

解(1) 由题5-29图可以写出系统开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{10}{s \left( \frac{s}{0.1} + 1 \right) \left( \frac{s}{20} + 1 \right)}$$

(2) 系统的开环相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{0.1} - \arctan \frac{\omega}{20}$$



截止频率  $\omega_c = \sqrt{0.1 \times 10} = 1$   
 相角裕度  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 2.85^\circ$

故系统稳定。

(3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程后，可得系统新的开环传递函数

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

其截止频率  $\omega_{c1} = 10\omega_c = 10$   
 而相角裕度  $\gamma_1 = 180^\circ + \varphi(\omega_{c1}) = 2.85^\circ = \gamma$

故系统稳定性不变。由时域指标估算公式可得

$$\sigma_{\%} = 0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1\right) = \sigma_{\%}$$

$$t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} = \frac{K\pi}{10\omega_{c1}} = 0.1t_{s1}$$

所以，系统的超调量不变，调节时间缩短，动态响应加快。

5—25 对于典型二阶系统，已知参数  $\omega_n = 3$ ， $\xi = 0.7$ ，试确定截止频率  $\omega_c$  和相角裕度  $\gamma$ 。

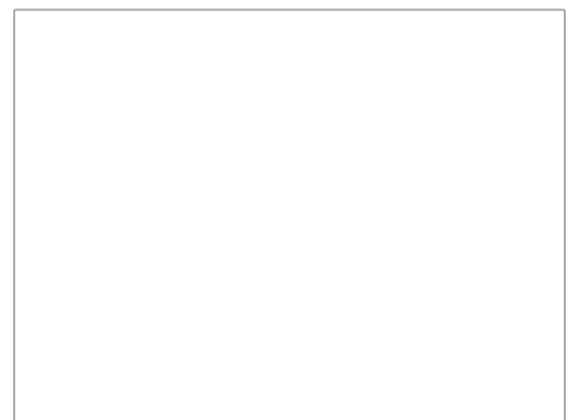
解 依题意，可设系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{3^2}{s(s + 2 \times 0.7 \times 3)} = \frac{2.143}{s\left(\frac{s}{4.2} + 1\right)}$$

绘制开环对数幅频特性曲线  $L(\omega)$  如图解5—25所示，得

$$\omega_c = 2.143$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 63^\circ$$



5—26 对于典型二阶系统，已知  $\sigma_{\%} = 15\%$ ， $t_s = 3\text{ s}$ ，试计算相角裕度  $\gamma$ 。

解 依题意，可设系统的开环传递函数为

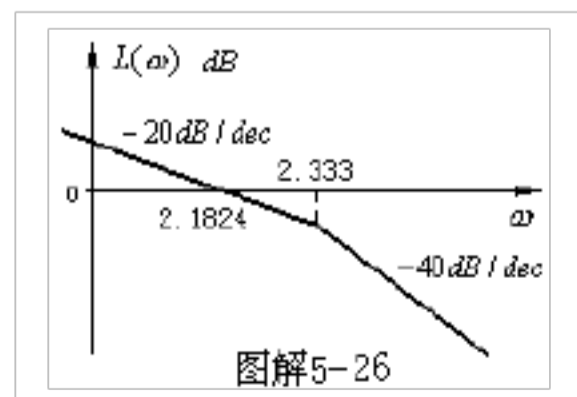
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\%} = 15\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \\ t_s = 3 = 3.5/\xi\omega_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.517 \\ \omega_n = 2.257 \end{cases}$$

依题

联立求解



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/848123003101006053>