

2022-2023 学年度（上）
沈阳市五校协作体期中考试
高一年级数学试卷

命题人：马俊红 校对：张艳玲

考试时间：120 分钟 分数：150 分

试卷说明：试卷共两部分：第一部分：选择题型（1-12 题 共 60 分）

第二部分：非选择题型（13-22 题 共 90 分）

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x < 3\}$ ，则集合 A 的所有非空真子集的个数是（ ）

- A. 6 B. 7 C. 14 D. 15

【答案】A

【解析】

【分析】根据自然数集的特征，结合子集的个数公式进行求解即可.

【详解】因为 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x < 3\} = \{0, 1, 2\}$ ，

所以集合 A 的元素个数为 3，

因此集合 A 的所有非空真子集的个数是 $2^3 - 2 = 6$ ，

故选：A

2. 已知函数 $f(x) = 2^x + x - 4$ 的图象是一条连续不断的曲线，则函数 $f(x)$ 在下列哪个区间内必有零点（ ）

- A. (3,4) B. (2,3) C. (1,2) D. (0,1)

【答案】C

【解析】

【分析】利用零点存在定理可直接判断.

【详解】Q $f(x) = 2^x + x - 4$ ， $\therefore f(1) = 2 + 1 - 4 = -1 < 0$ ， $f(2) = 4 + 2 - 4 = 2 > 0$ ，由零点存在定理可

知， $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内必有零点.

故选：C

3. 集合 $P = \{x \mid |x| = 1\}$ ，集合 $Q = \{x \mid ax + 1 = 0\}$ ，若 $Q \subseteq P$ ，那么实数 a 的所有可能取值的集合为 ()

A. $\{-1\}$

B. $\{1\}$

C. $\{-1, 1\}$

D. $\{-1, 0, 1\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题得 $P = \{-1, 1\}$ ，再对 P 分三种情况讨论得解.

【详解】由题得 $P = \{-1, 1\}$ ，

因为 $Q \subseteq P$ ，所以 $Q = \emptyset, \{-1\}, \{1\}$.

当 $Q = \emptyset$ 时， $a = 0$;

当 $Q = \{-1\}$ 时， $a \times (-1) = -1, \therefore a = 1$;

当 $Q = \{1\}$ 时， $a \times (1) = -1, \therefore a = -1$.

所以实数 a 的所有可能取值的集合为 $\{-1, 0, 1\}$.

故选：D

4. 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ 且 $4x + y = 4$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y}$ 的最小值为 ()

A. 3

B. $\frac{25}{4}$

C. 25

D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】根据基本不等式，结合已知等式进行求解即可.

【详解】因为 $x > 0$ ， $y > 0$ 且 $4x + y = 4$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{4}(4x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}\right) = \frac{1}{4}\left(13 + \frac{y}{x} + \frac{36x}{y}\right) \geq \frac{1}{4}\left(13 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{36x}{y}}\right) = \frac{25}{4},$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{36x}{y}$ 时取等号，即当 $x = \frac{2}{5}, y = \frac{12}{5}$ 时取等号，

故选：B

5. 若命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ ， $x_0^2 + 2mx_0 + m + 2 < 0$ ”为假命题，则 m 的取值范围是 ()

- A. $-1 \leq m \leq 2$ B. $-1 < m < 2$ C. $m \leq -1$ 或 $m \geq 2$ D. $m < -1$ 或 $m > 2$

【答案】A

【解析】

【分析】先转化为命题的否定，再由一元二次不等式的性质求解即可.

【详解】命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2mx_0 + m + 2 < 0$ ”的否定为“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0$ ”，该命题为真命题，即 $\Delta = 4m^2 - 4(m + 2) \leq 0$ ，解得 $m \in [-1, 2]$.

故选：A

6. 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是严格增函数，且

$f(2) = 0$ ，则不等式 $\frac{f(x)}{x} \leq 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ B. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$ D. $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】确定函数的单调性，考虑 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两种情况，题目转化为 $f(x) \leq 0$ 或 $f(x) \geq 0$ ，根据函数值结合函数单调性得到答案.

【详解】函数 $y = f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的偶函数， $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是严格增函数，

故函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减， $f(-2) = f(2) = 0$ ，

当 $x > 0$ 时， $\frac{f(x)}{x} \leq 0$ ，即 $f(x) \leq 0$ ，故 $x \in (0, 2]$ ；

当 $x < 0$ 时， $\frac{f(x)}{x} \leq 0$ ，即 $f(x) \geq 0$ ，故 $x \in (-\infty, -2]$.

综上所述： $x \in (-\infty, -2] \cup (0, 2]$

故选：C

7. 若 $p: a \in \mathbf{R}$ 且 $-1 < a < 1$ ， q ：二次函数 $y = x^2 + (a+1)x + a - 2$ 有两个零点，且一个零点大于零，另一个零点小于零；则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据互逆命题的性质，结合一元二次方程根的判别式和根与系数关系、充分性、必要性的定义进行求解即可.

【详解】设 $x^2 + (a+1)x + a - 2 = 0$ 的一个根 x_1 大于零，另一根 x_2 小于零，则 $x_1 x_2 = a - 2 < 0$ ，解得 $a < 2$ ，

因为命题：若 $\neg p$ ，则 $\neg q$ 的逆否命题为：若 q ，则 p ，

由 $\{a | -1 < a < 1\}$ 是 $\{a | a < 2\}$ 的真子集，

因此 q 是 p 的必要不充分条件.

故选：B.

8. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ ，对任意的 $x_1, x_2 \in [2023, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ，若函数 $y = f(x + 2023)$ 为奇函数， $(a - 2023)(b - 2023) < 0$ 且 $a + b > 4046$ ，则 ()

A. $f(a) + f(b) > 0$

B. $f(a) + f(b) = 0$

C. $f(a) + f(b) < 0$

D. $f(a) + f(b)$ 的值与 0 的大小关系不确定

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，先求出函数的单调性和对称中心，然后已知条件进行转化，进而求出结果.

【详解】由题意可知：定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ ， $x_1, x_2 \in [2023, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，

都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ，则 $f(x)$ 在区间 $[2023, +\infty)$ 上单调递减，

又因为函数 $y = f(x + 2023)$ 为奇函数，则 $f(-x + 2023) = -f(x + 2023)$ ，

当 $x = 0$ 时，则 $f(2023) = -f(2023)$ ，也即 $f(2023) = 0$ ，

又因为函数 $y = f(x + 2023)$ 关于原点 $(0, 0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2023, 0)$ 对称，所以函数

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，因为 $(a - 2023)(b - 2023) < 0$ ，

设 $a < b$ ，则 $a < 2023, b > 2023$ ，则有 $f(a) > 0, f(b) < 0$ ，

又因为 $a+b > 4046$ ，则 $f(a)+f(b) < 0$ ，

故选：C.

二、多选题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 设 a 、 b 、 c 为正实数，且 $a > b$ ，则（ ）

A. $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$

B. $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$

C. $\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$

D. $a(c^2+1) > b(c^2+1)$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

利用不等式的基本性质可判断 ACD 选项的正误；利用作差法可判断 B 选项的正误.

【详解】对于 A 选项，由于 a 、 b 为正实数，且 $a > b$ ，所以， $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$ ，即 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，

由不等式的性质可得 $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ ，A 选项正确；

对于 B 选项，由于 a 、 b 、 c 为正实数，且 $a > b$ ，

则 $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b}{a} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{a(a+c)} = \frac{c(a-b)}{a(a+c)} > 0$ ，所以， $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$ ，B 选项正确；

对于 C 选项， $Q a > b > 0$ ，则 $a^2 > b^2 > 0$ ，所以， $\frac{a^2}{a^2b^2} > \frac{b^2}{a^2b^2}$ ，即 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ ，

$Q c > 0$ ， $\therefore \frac{c}{a^2} < \frac{c}{b^2}$ ，C 选项错误；

对于 D 选项， $Q c > 0$ ，则 $c^2+1 > 0$ ，又 $Q a > b$ ，因此， $a(c^2+1) > b(c^2+1)$ ，D 选项正确.

故选：ABD.

10. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调递减函数，并且同时满足下列两个条件：①对 $\forall x, y \in (0, +\infty)$ ，

都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$ ；② $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ；则下列结论正确的是（ ）

A. $f(1) = 0$ ；

B. 不等式 $f(x) + f(3-x) < 2$ 的解集为 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right\}$

C. $f(4) = -1$;

D. 使 $f(kx) + f(3-x) < 2$ 有解的所有正数 k 的集合为 $\left\{k \mid k > \frac{4}{9}\right\}$.

【答案】AB

【解析】

【分析】选项 AC 赋值法即可求解， $f(x) + f(3-x) = f[x(3-x)]$ ，根据函数的单调性把数值不等式转化为自变量不等式，解不等式即可求得结果，即可判断选项 B，根据条件把 $f(kx) + f(3-x) < 2$ 转化为 $kx(3-x) > \frac{1}{4}$ ，根据函数的单调性把函数值不等式转化为自变量不等式有解，分离参数转化成求函数的最值问题，即可判断选项 D.

【详解】因为对 $\forall x, y \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$ ，

令 $x = y = 1$ ，即 $f(1) = f(1) + f(1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，故选项 A 正确；

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ，再令 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = 2$ ， $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 0$ ，解得 $f(2) = -1$ ，

令 $x = y = 2$ ，则 $f(4) = f(2) + f(2) = -2$ ，故选项 C 错误；

由已知 $f(x) + f(3-x) < 2$ ， $x \in (0, 3)$ ，

根据题干给出的条件有： $f[x(3-x)] < 2$ ，

当 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = \frac{1}{2}$ 时， $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ ，即 $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ ，

于是 $f[x(3-x)] < 2$ 等价于 $f[x(3-x)] < f\left(\frac{1}{4}\right)$ ，

Q 函数 $f(x)$ 单调递减， $f[x(3-x)] < f\left(\frac{1}{4}\right)$ ， $\therefore x(3-x) > \frac{1}{4}$ ，且 $0 < x < 3$ ，

解得： $0 < x < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ ，所以 x 的取值范围为 $(0, \frac{3}{2} + \sqrt{2})$ ，故选项 B 正确；

同理，不等式 $f(kx) + f(3-x) < 2$ 可化为 $kx(3-x) > \frac{1}{4}$ 且 $0 < x < 3$ ， $k > 0$ ，

得 $k > \frac{1}{4x(3-x)}$ ，此不等式有解，等价于 $k > \left[\frac{1}{4x(3-x)}\right]_{\min}$ ，

在 $0 < x < 3$ 的范围内，由基本不等式 $x(3-x) \leq \left(\frac{x+3-x}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ，当且仅当 $x = (3-x)$ ，即 $x = \frac{3}{2}$ 时等号成立，

$$4x(3-x) \leq 9, \quad \frac{1}{4x(3-x)} \geq \frac{1}{9},$$

故 $k > \frac{1}{9}$ 即为所求范围，故选项 D 错误，

故选：AB.

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax-1, & x < a \\ x^2-2ax+1, & x \geq a \end{cases}$ ， $f(x)$ 存在最小值时，实数 a 的值可能是 ()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据函数解析式，分 $a > 0$ 、 $a = 0$ 、 $a < 0$ 三种情况讨论，当 $a < 0$ 时根据二次函数的性质只需函数在断点处左侧的函数值不小于右侧的函数值即可；

【详解】解：因为 $f(x) = \begin{cases} ax-1, & x < a \\ x^2-2ax+1, & x \geq a \end{cases}$ ，

若 $a > 0$ ，当 $x < a$ 时 $f(x) = ax-1$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增，当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $f(x) \rightarrow -\infty$ ，此时函数不存在最小值；

若 $a = 0$ ，则 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ，此时 $f(x)_{\min} = -1$ ，符合题意；

若 $a < 0$ ，当 $x < a$ 时 $f(x) = ax-1$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减，

当 $x \geq a$ 时 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ ，

二次函数 $y = x^2 - 2ax + 1$ 对称轴为 $x = a$ ，开口向上，此时 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增，

要使函数 $f(x)$ 存在最小值，只需 $\begin{cases} a < 0 \\ a^2 - 1 \geq a^2 - 2a^2 + 1 \end{cases}$ ，解得 $a \leq -1$ ，

综上可得 $a \in (-\infty, -1] \cup \{0\}$ 。

故选：ABC

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 A ，若对任意 $x \in A$ ，都存在正数 M 使得 $|f(x)| \leq M$ 总成立，则称函数 $f(x)$ 是定义在 A 上的“有界函数”。则下列函数是“有界函数”的是 ()

A. $f(x) = x + \sqrt{4-x}$

B. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

C. $f(x) = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$

D. $f(x) = |x+1| - |x-1|$

【答案】BCD

【解析】

【分析】分别求出四个函数的值域，对照“有界函数”的概念即可判定.

【详解】 $f(x) = x + \sqrt{4-x}$ ，令 $t = \sqrt{4-x}$ ， $t \geq 0$ ，

则 $x = 4 - t^2$ ，即 $f(t) = -t^2 + t + 4$ ， $t \geq 0$ ，

当 $t = \frac{1}{2}$ 时， $f(x)_{\max} = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 4 = \frac{17}{4}$ ，无最小值，即 $f(x) \in \left(-\infty, \frac{17}{4}\right)$ ， $|f(x)| \in [0, +\infty)$ ，

此时不存在正数 M 使得 $|f(x)| \leq M$ 总成立，故 $f(x) = x + \sqrt{4-x}$ 不是定义域为 A 有界函数， A 选项错误.

$f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3} = \sqrt{-(x+1)^2 + 4}$ ，有 $0 \leq f(x) \leq 2$ ，所以 $|f(x)| \leq 2$ ， $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ 是定义域为 A 有界函数， B 选项正确；

$f(x) = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$ ，令 $y = 2x^2 - 4x + 3 (y \neq 0)$ ，

当 $x = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$ 时，函数 $y = 2x^2 - 4x + 3 (y \neq 0)$ 有最小值 $2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 1$ ，

即 $2x^2 - 4x + 3 \geq 1$ ，有 $0 < \frac{5}{2x^2 - 4x + 3} \leq \frac{5}{1} = 5$ ，所以 $|f(x)| \leq 5$ ，

故函数 $f(x) = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$ 是定义域为 A 有界函数， C 选项正确；

$f(x) = |x+1| - |x-1| = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ ，有 $-2 \leq f(x) \leq 2$ ，所以 $|f(x)| \leq 2$ ， $f(x) = |x+1| - |x-1|$ 是

定义域为 A 有界函数， D 选项正确；

故选：BCD

第Ⅱ卷非选择题型（13-22 题 共 90 分）

三、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(0,1)$ ，则 $f(x^2)$ 的定义域是_____.

【答案】 $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

【解析】

【分析】由题知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,3)$ ，再根据 $x^2 \in (1,3)$ 求解即可.

【详解】解：因为函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(0,1)$ ，

所以，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,3)$ ，

所以 $x^2 \in (1, 3)$, 解得 $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$,

所以, $f(x^2)$ 的定义域是 $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$.

故答案为: $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

14. 若函数 $f(x) = kx^2 + (3k-2)x - 5$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $[0, \frac{1}{2}]$

【解析】

【分析】 根据二次函数和一次函数的单调性分类讨论求解即可.

【详解】 当 $k=0$ 时, $f(x) = -2x - 5$, 显然该函数在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减;

当 $k \neq 0$ 时, 该函数的对称轴为: $x = -\frac{3k-2}{k}$,

要想该函数在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减,

$$\text{只需满足 } \begin{cases} k > 0 \\ -\frac{3k-2}{k} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < k \leq \frac{1}{2},$$

综上所述: k 的取值范围是 $[0, \frac{1}{2}]$,

故答案为: $[0, \frac{1}{2}]$

15. 已知实数 x, y 满足 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】 法八: 利用基本不等式, 即可求解.

【详解】 [方法一]: (代换, 用判别式法)

设 $2x + y = t$, 则 $y = t - 2x$, 代入 $4x^2 + y^2 + xy = 1$,

得 $6x^2 - 3tx + t^2 - 1 = 0$, 由 $\Delta \geq 0$ 得 $t^2 \leq \frac{8}{5}$, 因此 $2x + y \leq \frac{2}{5}\sqrt{10}$.

[方法二]: (代换, 构造一元二次方程用判别式法)

设 $2x + y = t$, 则 $2xy = \frac{2}{3}(t^2 - 1)$, 则 $2x, y$ 可看作关于 m 的方程 $m^2 - tm + \frac{2}{3}(t^2 - 1) = 0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/848127107105007006>