第二十七章　圆

27.2.3 与圆有关的位置关系

第2课时 切线长定理及三角形的内切圆

目标导航

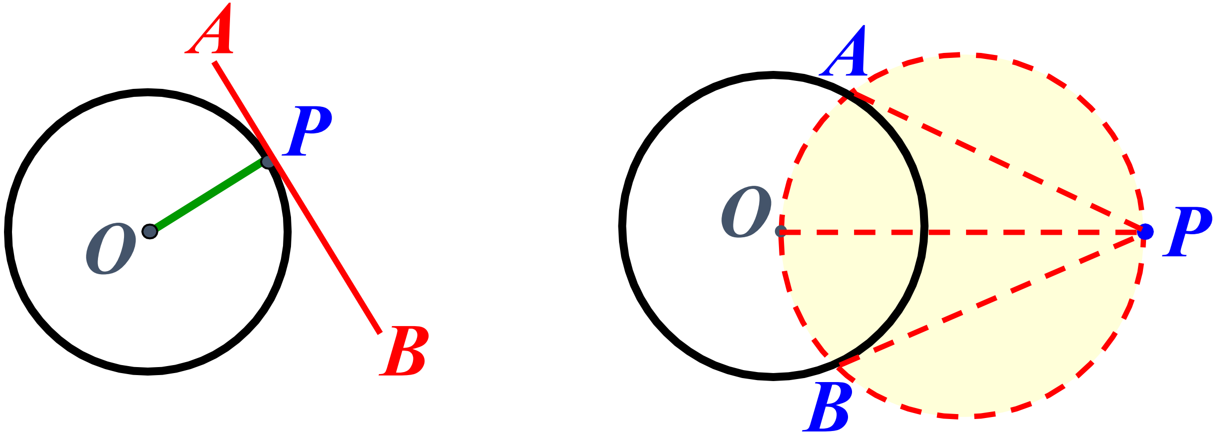
1.掌握切线长的定义及切线长定理.

2.初步学会运用切线长定理进行计算与证明.（难点）

3.认识三角形的内切圆及其有关概念，会作一个三角形的内切圆，掌握内心的性质.（重点）

切线长定理及应用

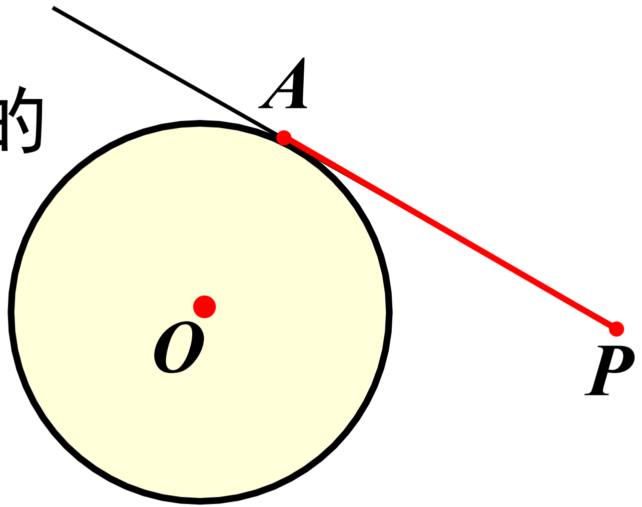
探究 上节课我们学习了过圆上一点作已知圆的切线(如下图所示)，如果点 P 是圆外一点，又怎么作该圆的切线呢？过圆外的一点作圆的切线，可以作几条？



讲授新课

1. 切线长的定义：

圆的切线上某一点与切点之间的线段的长叫做这点到圆的**切线长**.



2. 切线长与切线的区别在哪里？

① 切线是直线，不能度量；

② 切线长是线段的长，这条线段的两个端点分别是圆外一点和切点，可以度量.

如：线段 PA 的长就是点 P 到⊙O 的切线长.

问题 PA 为⊙O 的一条切线，沿着直线 PO 对折，设圆上与点 A 重合的点为 B.

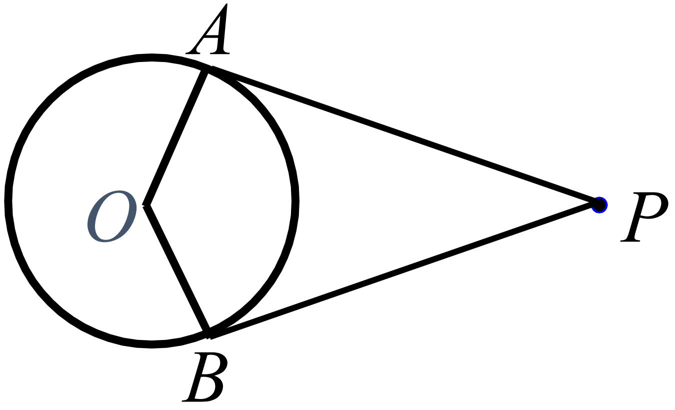
➢ OB 是⊙O 的一条半径吗？

➢ PB 是⊙O 的切线吗？

➢ PA、PB 有何关系？

➢ $\angle APO$ 和 $\angle BPO$ 有何关系？

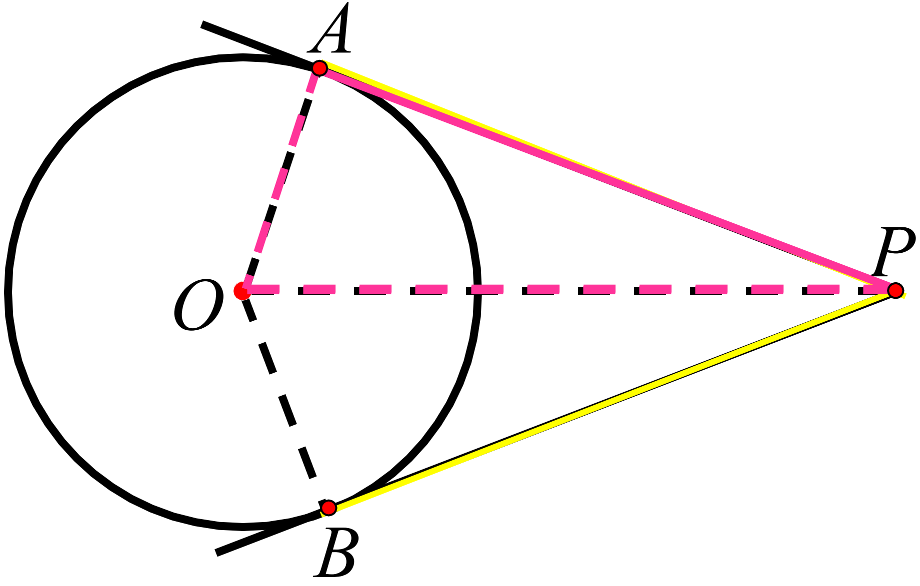
（利用图形轴对称性解释）



要点归纳

***切线长定理：**

过圆外一点所画的圆的两条切线，它们的切线长相等. 这一点和圆心的连线平分这两条切线的夹角.



几何语言：

PA、PB 分别切 $\odot O$ 于 A，B $\longrightarrow \begin{cases} PA = PB \\ \angle OPA = \angle OPB \end{cases}$

注意

切线长定理为证明线段相等、角相等提供了新的方法.

推理验证

已知：如图，PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，A、B 为切点.

求证：$PA = PB$，$\angle APO = \angle BPO$.

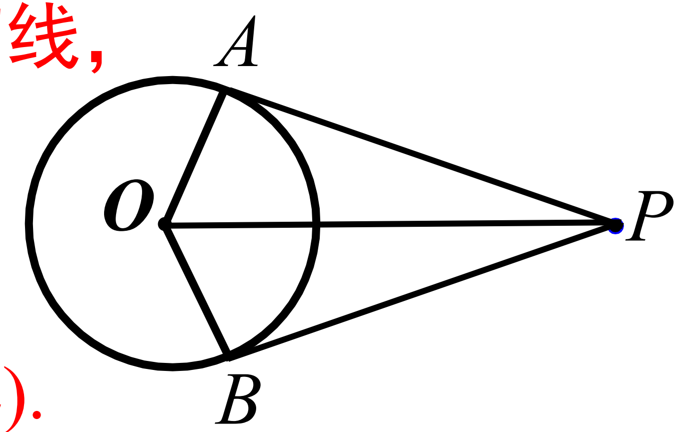
证明：$\because$ PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，

$\therefore$ $OA \perp PA$，$OB \perp PB$.

$\because$ $OA = OB$，$OP = OP$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle OAP \cong \mathrm{Rt}\triangle OBP$(HL).

$\therefore$ $PA = PB$，$\angle APO = \angle BPO$.



思考：

若连接两切点 A、B，AB 交 OP 于点 M. 你又能得出什么新的结论？请给出证明.

解：OP 垂直平分 AB.

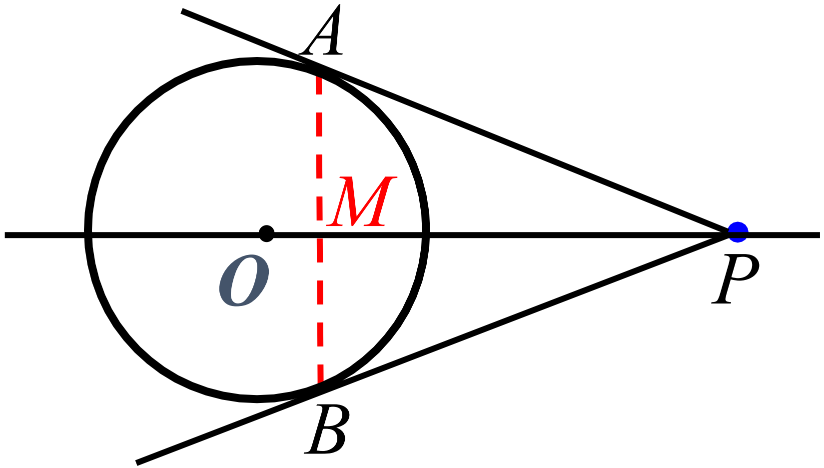
证明：$\because$ PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，点 A，B 是切点，

$\therefore$ $PA = PB$，$\angle OPA = \angle OPB$.

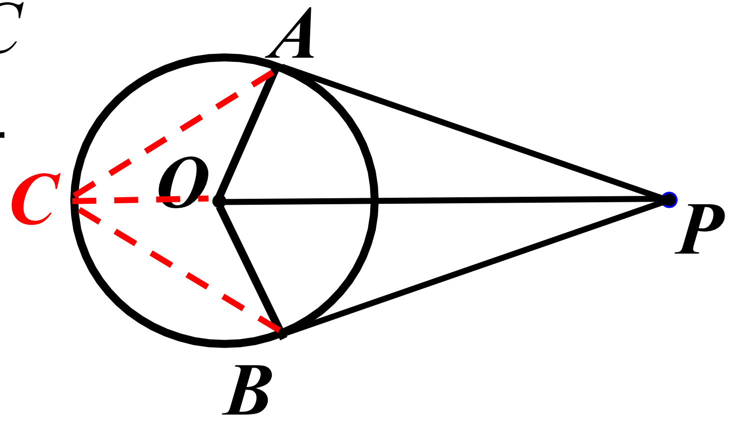
$\therefore$ $\triangle PAB$ 是等腰三角形，

PM 为顶角的平分线.

$\therefore$ OP 垂直平分 AB.



思考：若延长 PO 交 $\odot O$ 于点 C，连结 CA、CB，你又能得出什么新的结论?并给出证明.



新的结论：$CA=CB$.

证明：$\because$ PA，PB 是$\odot O$ 的切线，点 A，B 是切点，

$\therefore PA=PB$，$\angle OPA=\angle OPB$.

$\because PC=PC$.

$\therefore \triangle PCA \cong \triangle PCB$ (S. A. S.).

$\therefore AC=BC$.

注意： 如图27.2-21 是切线长定理的一个基本图形, 可以直接得到结论：(1)$PO \perp AB$；

(2)$AO \perp AP$，$BO \perp BP$；

(3)$AP=BP$；

(4)$\angle 1= \angle 2= \angle 3= \angle 4$；

(5)$AD=BD$；

(6)$AC = BC$等.

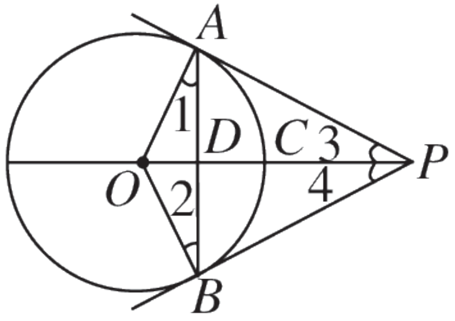


图 27.2−21

例1 如图27.2-22，PA，PB，DE 分别切$\odot O$ 于点A，B，C，点D 在PA 上，点E 在PB 上.

(1)若$PA=10$，求$\triangle PDE$ 的周长；

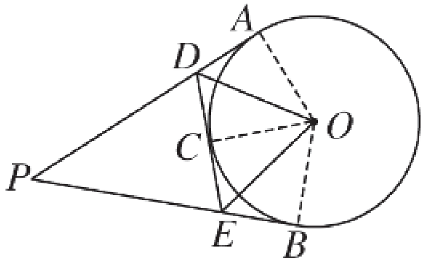


图 27.2−22

解：$\because$ PA，PB，DE 分别切$\odot O$ 于点A，B，C，

$\therefore$ $PB=PA=10$，$DA=DC$，$EC=EB$.

$\therefore$ $PD+DE+PE=PD+DC+CE+PE=PD+DA+EB+PE=PA+PB=10+10=20$.

$\therefore \triangle PDE$ 的周长为20.

(2)若$\angle P=50°$，求$\angle DOE$的度数.

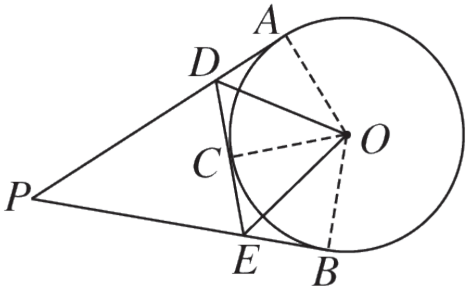


图 27.2−22

解：如图27.2-22，连结OA，OC，OB.

$\because PA$，PB，DE是$\odot O$的切线，

$\therefore OA\perp PA$，$OB\perp PB$，$OC\perp DE$.

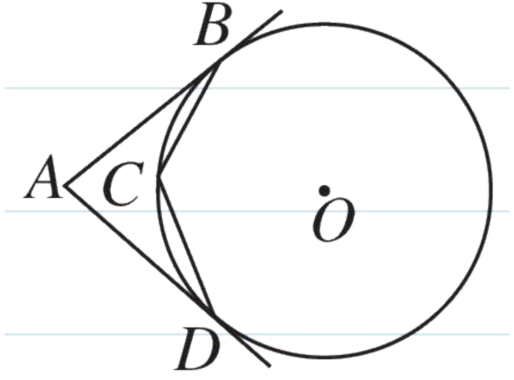
$\therefore \angle DAO=\angle EBO=90°$. $\therefore \angle P+\angle AOB=180°$.

$\therefore \angle AOB=180°-50°=130°$.

易知$\angle AOD=\angle DOC$，$\angle COE=\angle BOE$，

$\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 130°=65°$.

1-1. (易错题) 如图，直线AB，AD 分别与⊙ O 相切于点B，D，C 为⊙ O 上一点， 且∠ BCD=130°，则∠ A的度数是(　　)



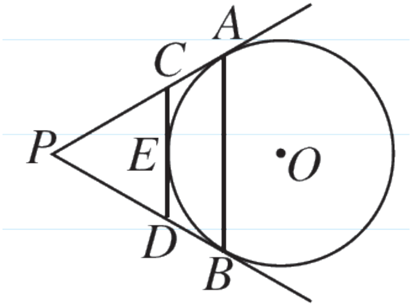
A. 70°

B. 85°

C. 80°

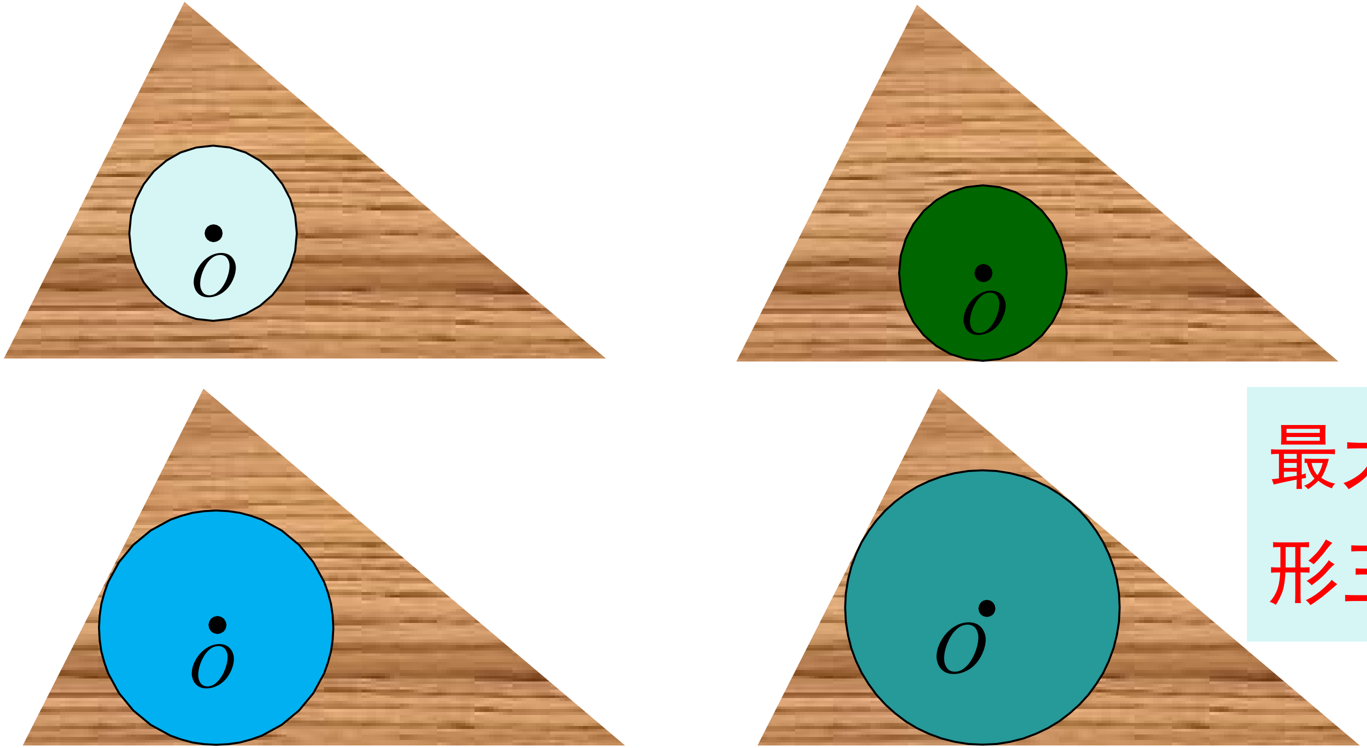
D. 100°

1-2. 如图，PA，PB切⊙ O 于A，B 两点，CD 切⊙ O 于点 E，交PA，PB 于点C，D. 若⊙ O 的半径为2，△ PCD 的周长等于$4\sqrt{3}$，则线段AB 的长是 $2\sqrt{3}$ ________.



三角形的内切圆及作法

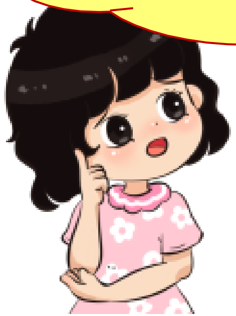
问题1 如果最大圆存在，它与三角形三边应有怎样的位置关系？



最大的圆与三角形三边都相切

问题2 如何求作一个圆，使它与三角形的三边都相切？(1) 如果半径为 r 的 $\odot I$ 与 $\triangle ABC$ 的三边都相切，那么圆心 I 应满足什么条件？

(2) 在 $\triangle ABC$ 的内部，如何找到满足条件的圆心 I 呢？



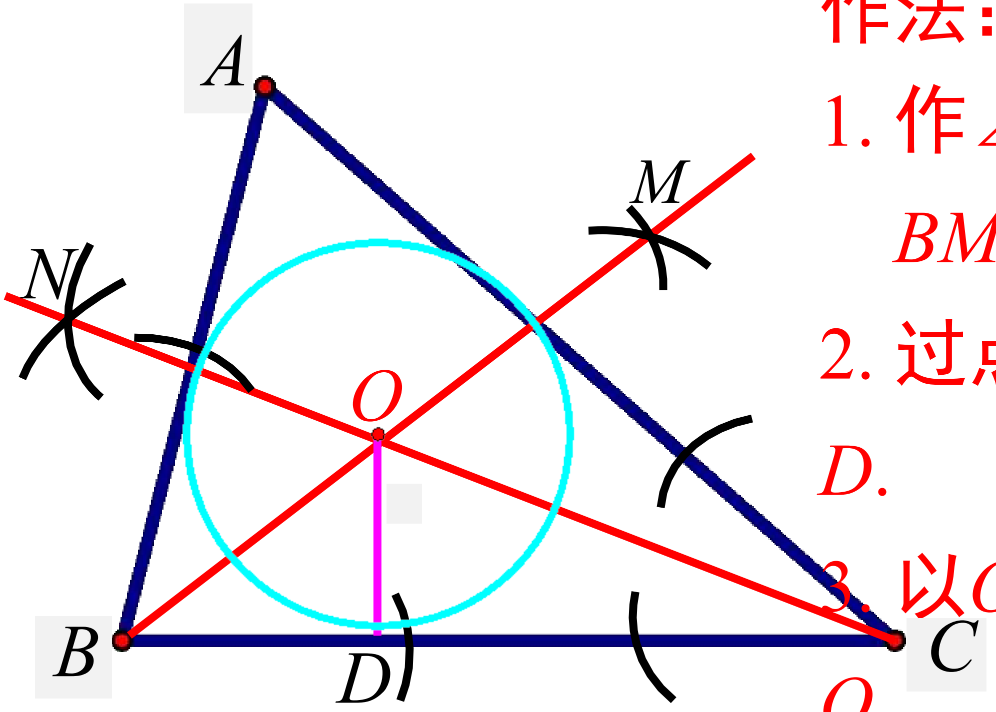
三角形角平分线的这个性质，你还记得吗？

圆心 I 应是三角形的三条角平分线的交点.

做一做

已知：$\triangle ABC$.

求作：和$\triangle ABC$的各边都相切的圆 O.



作法：

1. 作$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线 BM和CN，交点为O.

2. 过点O作$OD\perp BC$，垂足为D.

3. 以O为圆心，OD为半径作圆O.

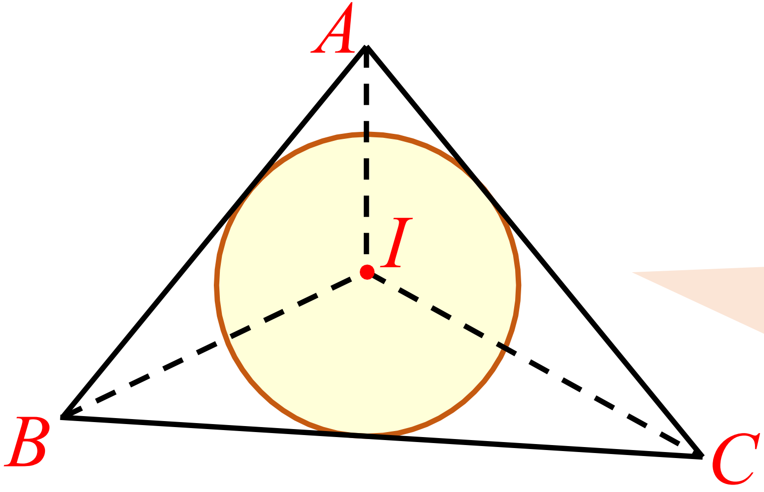
$\odot O$就是所求的圆.

知识要点

1. 与三角形各边都相切的圆叫做这个三角形的内切圆.

2. 三角形内切圆的圆心叫做这个三角形的内心.

3. 这个三角形叫做这个圆的外切三角形.



$\odot I$ 是$\triangle ABC$ 的内切圆，

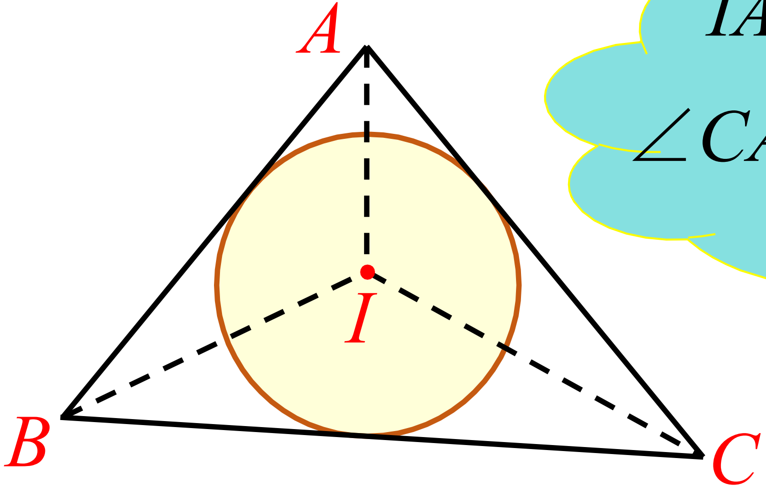
点 I 是$\triangle ABC$ 的内心，

$\triangle ABC$ 是$\odot I$ 的外切三角形.

三角形的内心的性质

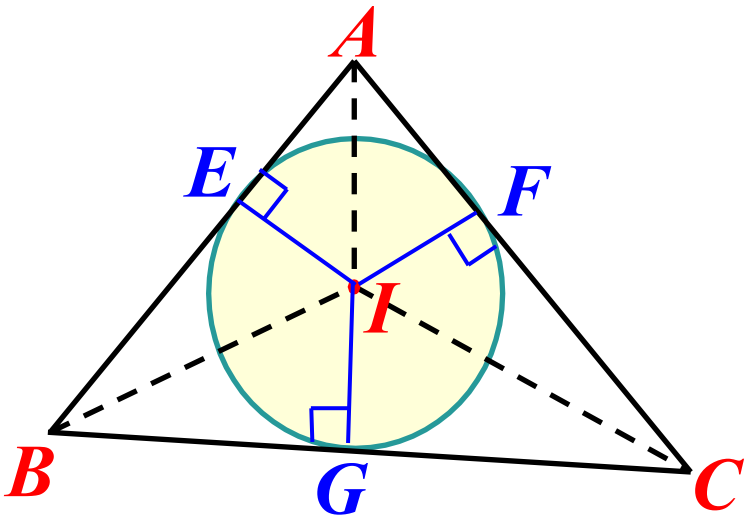
互动探究

问题1 如图，$\odot I$ 是$\triangle ABC$ 的内切圆，那么 AI、BI、CI 有什么特点？



IA、IB、IC 分别平分 $\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$.

问题2 如图，分别过点作 AB、AC、BC 的垂线，垂足分别为 E、F，G，那么线段 IE、IF、IG 之间有什么关系？



$IE = IF = IG$