专题35 圆的方程

【考点预测】

知识点一：基本概念

平面内到定点的距离等于定长的点的集合（轨迹）叫圆.

知识点二：基本性质、定理与公式

1．圆的四种方程

（1）圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心坐标为（a，b），半径为$r(r>0)$

（2）圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

（3）圆的直径式方程：若$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则以线段AB为直径的圆的方程是$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

（4）圆的参数方程：

①$x^2+y^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）；

②$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）.

注意：对于圆的最值问题，往往可以利用圆的参数方程将动点的坐标设为$(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$（$\theta$为参数，$(a,b)$为圆心，$r$为半径），以减少变量的个数，建立三角函数式，从而把代数问题转化为三角问题，然后利用正弦型或余弦型函数的有界性求解最值.

2．点与圆的位置关系判断

（1）点$P(x_0,y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系：

①$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2\Leftrightarrow$点$P$在圆外；

②$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\Leftrightarrow$点$P$在圆上；

③$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\Leftrightarrow$点$P$在圆内.

（2）点$P(x_0,y_0)$与圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的位置关系：

①$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0\Leftrightarrow$点$P$在圆外；

②$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0\Leftrightarrow$点$P$在圆上；

③$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0\Leftrightarrow$点$P$在圆内.

【题型归纳目录】

题型一：求圆多种方程的形式

题型二：直线系方程和圆系方程

题型三：与圆有关的轨迹问题

题型四：用二元二次方程表示圆的一般方程的充要条件

题型五：点与圆的位置关系判断

题型六：数形结合思想的应用

题型七：与圆有关的对称问题

题型八：圆过定点问题

【典型例题】

题型一：求圆多种方程的形式

例 1．已知$\odot O$的圆心是坐标原点O，且被直线$2x-y+5=0$截得的弦长为4，则$\odot O$的方程为（　　）

A．$x^2+y^2=4$　　*B*．$x^2+y^2=8$

C．$x^2+y^2=8$　　*D*．$x^2+y^2=9$

例 2．过点（7，-2）且与直线$2x-3y+6=0$相切的半径最小的圆方程是（　　）

A．$(x-5)^2+(y+1)^2=5$　　*B*．$(x-5)^2+(y-1)^2=13$

C．$(x-4)^2+(y+4)^2=13$　　*D*．$(x-1)^2+(y+6)^2=52$

例 3．若圆 C 与直线l_1：$x+y=0$和l_2：$x+y-8=0$都相切，且圆心在 y 轴上，则圆 C 的方程为（　　）

A．$x^2+(y+4)^2=8$　　*B*．$x^2+(y-4)^2=8$

C．$x^2+(y+4)^2=16$　　*D*．$x^2+(y-4)^2=16$

例 4．过点$A(3,1)$的圆C与直线$x-y=0$相切于点$B(1,1)$，则圆C的方程为（　　）

A．$(x-2)^2+y^2=2$　　*B*．$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

C．$(x-3)^2+(y-4)^2=9$　　*D*．$(x-3)^2+(y+1)^2=8$

例 5．已知直线$l:2x-y+2=0$与以点$C(2,1)$为圆心的圆相交于 A，B 两点，且$CA\perp CB$，则圆 C 的方程为（　　）

A．$(x-2)^2+(y-1)^2=25$　　*B*．$(x-2)^2+(y-1)^2=20$

C．$(x-2)^2+(y-1)^2=10$　　*D*．$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

例 6．直线$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$与$x$轴，$y$轴分别交于点A，$B$，以线段$AB$为直径的圆的方程为（　　）

A．$x^2+y^2-4x-2y=0$　　B．$x^2+y^2-4x-2y-1=0$

C．$x^2+y^2-4x-2y+1=0$　　D．$x^2+y^2-2x-4y=0$

例 7．过点$A(1,-1)$，$B(-1,1)$，且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程是（　　）

A．$(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　B．$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

C．$(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　D．$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

例 8．过点$P(4,2)$作圆$x^2+y^2=4$两条切线，切点分别为A、B，O为坐标原点，则$\triangle OAB$的外接圆方程是（　　）

A．$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　　B．$(x-4)^2+(y-2)^2=20$

C．$(x+2)^2+(y+1)^2=5$　　D．$(x+4)^2+(y+2)^2=20$

例 9．已知三个点$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(4,2)$，则$\triangle ABC$的外接圆的圆心坐标是__________.

例 10．圆心在直线$y=-2x$上，并且经过点$A(2,-1)$，与直线$x+y=1$相切的圆C的方程是______.

【方法技巧与总结】

（1）求圆的方程必须具备三个独立的条件，从圆的标准方程上来讲，关键在于求出圆心坐标（a，b）和半径r；从圆的一般方程来讲，必须知道圆上的三个点．因此，待定系数法是求圆的方程常用的方法．

（2）用几何法来求圆的方程，要充分运用圆的几何性质，如圆心在圆的任一条弦的垂直平分线上，半径、弦心距、弦长的一半构成直角三角形等．

题型二：直线系方程和圆系方程

例 11．过圆$x^2+y^2-2y-4=0$与$x^2+y^2-4x+2y=0$的交点，且圆心在直线$l:2x+4y-1=0$上的圆的方程是_______.

例 12．已知圆$C_1:x^2+y^2-2x-3=0$与圆$C_2:x^2+y^2-4x+2y+3=0$相交于A、B两点．

（1）求公共弦AB所在直线方程；

（2）求过两圆交点A、B，且过原点的圆的方程．

例 13．已知圆$C_1:x^2+y^2+6x-16=0,C_2:x^2+y^2-4x-5=0$．求证：对任意不等于$-1$的实数$\lambda$，方程$x^2+y^2+6x-16+\lambda\left(x^2+y^2-4x-5\right)=0$是通过两个已知圆交点的圆的方程．

例 14．已知圆$C_1: x^2+y^2+4x-4y+4=0$和圆$C_2: x^2+y^2+2x=0$．

（1）求证：两圆相交；

（2）求过点$(-2,3)$，且过两圆交点的圆的方程．

【方法技巧与总结】

求过两直线交点（两圆交点或直线与圆交点）的直线方程（圆系方程）一般不需求其交点，而是利用它们的直线系方程（圆系方程）．

（1）直线系方程：若直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$与直线$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$相交于点P，则过点P的直线系方程为：$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0\ (\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0)$

简记为：$\lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2=0(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0)$

当$\lambda_1\neq 0$时，简记为：$l_1+\lambda l_2=0$（不含l_2）

（2）圆系方程：若圆$C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$与圆$C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$相交于$A$，$B$两点，则过$A$，$B$两点的圆系方程为：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq -1)$

简记为：$C_1+\lambda C_2=0(\lambda\neq -1)$，不含$C_2$

当$\lambda=-1$时，该圆系退化为公共弦所在直线（根轴）$l:(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$

注意：与圆C共根轴l的圆系$C_\lambda: C+\lambda l=0$

题型三：与圆有关的轨迹问题

例 15．已知点$A(0,1)$，$B(2,-1)$，动点$P(x,y)$满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1$，则点$P$的轨迹为__________．

例 16．古希腊几何学家阿波罗尼斯证明过这样一个命题：平面内到两定点距离之比为常数$k(k>0,k\neq 1)$的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆．在平面直角坐标系xOy中，$A(-4,0)$，$B(2,0)$，点M满足$\frac{|MA|}{|MB|}=2$，则点M的轨迹方程为（　　）

A．$(x+4)^2+y^2=16$　*B*．$(x-4)^2+y^2=16$　*C*．$x^2+(y+4)^2=16$　*D*．$x^2+(y-4)^2=16$

例 17．若圆$C_1: x^2+y^2=1$与圆$C_2:(x-a)^2+(y-b)^2=1$的公共弦AB的长为1，则下列结论正确的有（　　）

A．$a^2+b^2=1$

B．$a^2+b^2=14$

C．AB中点的轨迹方程为$x^2+y^2=\frac{3}{4}$

D．AB中点的轨迹方程为$x^2+y^2=\frac{9}{16}$

例 18．已知圆$O:x^2+y^2=1$，直线$l:x+y-2=0$，过l上的点P作圆O的两条切线，切点分别为A,B，则弦AB中点M的轨迹方程为（　　）

A．$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$　　B．$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\neq 0\right)$

C．$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$　　D．$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\neq 0\right)$

例 19．已知A，B为圆$C:x^2+y^2-2x-4y+3=0$上的两个动点，P为弦AB的中点，若$\angle ACB=90°$，则点P的轨迹方程为（　　）

A．$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}$　　B．$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

C．$(x+1)^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$　　D．$(x+1)^2+(y+2)^2=1$

例 20．**（多选题）**已知$a\in\mathbf{R}$，过定点A的直线为$l_1:ax+y=0$与过定点B的直线$l_2:x-ay-a+1=0$，两条动直线的交点为P，则（　　）

A．定点$A(0,1)$

B．定点$B(-1,-1)$

C．点P的轨迹方程为$x^2+y^2+x+y=0$

D．$\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|$的最大值为8

例 21．**（多选题）**在平面直角坐标系内，已知$A(-1,0)$，$B(1,0)$，C是平面内一动点，则下列条件中使得点C的轨迹为圆的有（　　）

A．$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$　　B．$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{BC}\right|$

C．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　D．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

例 22．在边长为 1 的正方形$ABCD$中，边AB、BC上分别有一个动点Q、R，且$|BQ|=|CR|$．求直线AR与DQ的交点P的轨迹方程．

例 23．已知圆C过点$(2,-3)$，$(0,-3)$，$(0,-1)$．

（1）求圆C的标准方程；

（2）已知点P是直线$2x+y-1=0$与直线$x+2y+1=0$的交点，过点P作直线与圆C交于点A，B，求弦

AB 的中点 M 的轨迹方程.

例 24．已知圆 $G:x^2+y^2-4x=0$，平面上一动点 P 满足：$PM^2+PN^2=6$ 且 $M(-1,0)$，$N(1,0)$．
求动点 P 的轨迹方程；

例 25．已知圆 $C:x^2+y^2=4$，直线 l 满足__________（从①l 过点 $(4,2)$，②l 斜率为 2，两个条件中，任选一个补充在上面问题中并作答），且与圆 C 交于 A，B 两点，求 AB 中点 M 的轨迹方程.

例 26．直线 $l:y=k(x-5)(k\neq 0)$ 与圆 $O:x^2+y^2=16$ 相交于 A，B 两点，O 为圆心，当 k 变化时，求弦 AB 的中点 M 的轨迹方程.

例 27．设不同的两点 A，B 在椭圆 $C:x^2+2y^2=3$ 上运动，以线段 AB 为直径的圆过坐标原点 O，过 O 作 $OM\perp AB$，M 为垂足．求点 M 的轨迹方程；

例 28．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2-2x-3$ 与两坐标轴的交点都在圆 C 上.
（1）求圆 C 的方程；
（2）已知 O 为坐标原点，点 A 在圆 C 上运动，求线段 OA 的中点 M 的轨迹方程.

【方法技巧与总结】

要深刻理解求动点的轨迹方程就是探求动点的横纵坐标 x，y 的等量关系，根据题目条件，直接找到或转化得到与动点有关的数量关系，是解决此类问题的关键所在.

题型四：用二元二次方程表示圆的一般方程的充要条件

例 29．若方程 $x^2+y^2+\lambda xy+2kx+4y+5k+\lambda=0$ 表示圆，则 k 的取值范围为________.

例 30．设甲：实数 $a<3$；乙：方程 $x^2+y^2-x+3y+a=0$ 是圆，则甲是乙的（　　）

A．充分不必要条件　　*B*．必要不充分条件

C．充要条件　　*D*．既不充分也不必要条件

例 31．已知点 A（1，2）在圆 C：$x^2+y^2+mx-2y+2=0$ 外，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(-3,-2)\cup(2,+\infty)$　　*B*．$(-3,-2)\cup(3,+\infty)$

C．$(-2,+\infty)$　　*D*．$(-3,+\infty)$

例 32．若方程 $x^2+y^2+6x+m=0$ 表示一个圆，则 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,9)$　　B．$(-\infty,-9)$　　C．$(9,+\infty)$　　D．$(-9,+\infty)$

例 33．曲线$C: x=\sqrt{-y^2+16y-15}$上存在两点 A，B 到直线$y=-\dfrac{1}{2}$到距离等于到$F\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$的距离，则$|AF|+|BF|=$（　　）

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

例 34．“$m>6$”是“方程$x^2+y^2-mx+4y+m+7=0$是圆的方程”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

例 35．已知点$A(2,1)$在圆 C：$x^2+y^2-2x+my+2=0$的外部，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(-3,-2)\cup(2,+\infty)$　　B．$(-2,2)\cup(3,+\infty)$

C．$(-2,+\infty)$　　D．$(-3,+\infty)$

例 36．方程$(3x-y+1)(y-\sqrt{1-x^2})=0$表示的曲线为（　　）

A．两条线段　　B．一条线段和一个圆

C．一条线段和半个圆　　D．一条射线和半个圆

例 37．已知 $a\in R$，若方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$ 表示圆，则此圆的圆心坐标为（　　）

A．（－2，－4）　　B．$\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$

C．（－2，－4）或$\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$　　D．不确定

【方法技巧与总结】

方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$表示圆的充要条件是$D^2+E^2-4F>0$，故在解决圆的一般式方程的有关问题时，必须注意这一隐含条件．在圆的一般方程中，圆心为$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，半径$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

题型五：点与圆的位置关系判断

例 38．已知直线$ax+by+c=0$过点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则（　　）

A．$a^2+b^2\le 1$　　B．$a^2+b^2\ge 1$

C．$a^2+b^2\le c^2$　　D．$a^2+b^2\ge c^2$

例 39．已知点$P\left(5a+1,12a\right)$在圆$\left(x-1\right)^2+y^2=1$的内部，则（　　）

A．$-1<a<1$　　　　*B*．$a<\frac{1}{13}$

C．$-\frac{1}{5}<a<\frac{1}{5}$　　　　*D*．$-\frac{1}{13}<a<\frac{1}{13}$

【方法技巧与总结】

在处理点与圆的位置关系问题时，应注意圆的不同方程形式对应的不同判断方法，另外还应注意其他约束条件，如圆的一般方程的隐含条件对参数的制约．

题型六：数形结合思想的应用

例 40．**（多选题）**关于曲线C：$x^2+y^2=2|x|+2|y|$，下列说法正确的是（　　）

A．曲线C围成图形的面积为$4\pi+8$

B．曲线C所表示的图形有且仅有2条对称轴

C．曲线C所表示的图形是中心对称图形

D．曲线C是以$\left(1,1\right)$为圆心，2为半径的圆

例 41．直线$y=x+b$与曲线$x=\sqrt{1-y^2}$有且仅有一个公共点．则b的取值范围是__________．

例 42．若关于x的方程$\sqrt{1-x^2}=mx+1$有且仅有一个实数解，则实数m的取值范围是________．

例 43．已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{1-\left(x-2\right)^2}+2$的图像上有且仅有两个不同的点关于直线$y=1$的对称点在$y=kx+1$的图像上，则实数$k$的取值范围是__________．

例 44．已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，其图象关于点$(2,0)$对称，当$x\in[0,2]$时，$f(x)=-\sqrt{1-(x-1)^2}$，若方程$f(x)-k(x-2)=0$的所有根的和为6，则实数k的取值范围是______．

例 45．广为人知的太极图，其形状如阴阳两鱼互纠在一起，因而被习称为“阴阳鱼太极图”如图是放在平面直角坐标系中的“太极图”整个图形是一个圆形区域$x^2+y^2\le 4$．其中黑色阴影区域在y轴左侧部分的边界为一个半圆．已知符号函数$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$，则当$x^2+y^2\le 4$时，下列不等式能表示图中阴影部分的是（　　）

A．$x\left(x^2+(y-\operatorname{sgn}(x))^2-1\right)\le 0$　　B．$y\left((x-\operatorname{sgn}(y))^2+y^2-1\right)\le 0$

C．$x\left(x^2+(y-\operatorname{sgn}(x))^2-1\right)\ge 0$　　D．$y\left((x-\operatorname{sgn}(y))^2+y^2-1\right)\ge 0$

例 46．已知平面直角坐标系内一动点 P，满足圆$C:(x-4)^2+y^2=1$上存在一点 Q 使得$\angle CPQ=45°$，则所有满足条件的点 P 构成图形的面积为（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　　B．π　　C．$\frac{3\pi}{2}$　　D．2π

【方法技巧与总结】

研究曲线的交点个数问题常用数形结合法，即需要作出两种曲线的图像．在此过程中，尤其要注意需对代数式进行等价变形，以防出现错误．

题型七：与圆有关的对称问题

例 47．若直线$y=kx$与圆$(x+2)^2+y^2=1$的两个交点关于直线$2x+y+b=0$对称，则k，b的值分别是（　　）

A．$-\frac{1}{2}$，-4　　B．$-\frac{1}{2}$，4

C．$\frac{1}{2}$，-4　　D．$\frac{1}{2}$，4

例 48．圆$x^2+y^2-2x+4y-4=0$关于直线$x+y-1=0$对称的圆的方程是（　　）

A．$(x-3)^2+y^2=16$　　B．$x^2+(y-3)^2=9$

C．$x^2+(y-3)^2=16$　　D．$(x-3)^2+y^2=9$

例 49．已知圆$(x+1)^2+(y+2)^2=4$关于直线$ax+by+1=0$（$a>0$，$b>0$）对称，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．9　　C．4　　D．8

例 50．设点$A(-2,3),B(0,a)$，若直线AB关于$y=a$对称的直线与圆$(x+3)^2+(y+2)^2=1$有公共点，则 a 的取值范围是________．

例 51．若圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$关于直线$l_1:x-y+4=0$和直线$l_2:x+3y=0$都对称，则 $D+E$ 的值为________．

【方法技巧与总结】

（1）圆的轴对称性：圆关于直径所在的直线对称

（2）圆关于点对称：

①求已知圆关于某点对称的圆的方程，只需确定所求圆的圆心，即可写出标准方程

②两圆关于某点对称，则此点为两圆圆心连线的中点

（3）圆关于直线对称：

①求已知圆关于某条直线对称的圆的方程，只需确定所求圆的圆心，即可写出标准方程

②两圆关于某条直线对称，则此直线为两圆圆心连线的垂直平分线

题型八：圆过定点问题

例 52．点 $P\left(x,y\right)$ 是直线 $2x+y-5=0$ 上任意一点，O 是坐标原点，则以 OP 为直径的圆经过定点（　　）

A．$\left(0,0\right)$ 和 $\left(1,1\right)$　　B．$\left(0,0\right)$ 和 $\left(2,2\right)$　　C．$\left(0,0\right)$ 和 $\left(1,2\right)$　　D．$\left(0,0\right)$ 和 $\left(2,1\right)$

例 53．一动圆的圆心在抛物线 $x^2=16y$ 上，且该动圆恒与直线 $y+4=0$ 相切，则动圆必经过的定点为（　　）

A．$\left(0,4\right)$　　B．$\left(4,0\right)$　　C．$\left(2,0\right)$　　D．$\left(0,2\right)$

例 54．已知直线 $l:\left(m^2+m+1\right)x+(3-2m)y-2m^2-5=0$，圆 $C:x^2+y^2-2x=0$，则直线 l 与圆 C 的位置关系是（　　）

A．相离　　B．相切　　C．相交　　D．不确定

例 55．在平面直角坐标系 xOy 中，设二次函数 $f(x)=x^2+2x+b(x\in R)$ 的图象与两坐标轴有三个不同的交点．经过这三个交点的圆记为 C．

（I）求实数 b 的取值范围；

（II）求圆 C 的一般方程；

（III）圆 C 是否经过某个定点（其坐标与 b 无关）？若存在，请求出点的坐标；若不存在，请说明理由．

例 56．判别方程 $x^2+y^2+2kx+(4k+10)y+10k+20=0$（$k$ 为参数，$k\neq-1$）表示何种曲线?找出通过定点的坐标．

【方法技巧与总结】

特殊值法

【过关测试】

一、单选题

1.（2023·全国·高三专题练习（文））已知圆$(x+1)^2+(y+2)^2=4$关于直线$ax+by+2=0\left(a>0,b>0\right)$对称，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为（ ）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{9}{2}$　　C．4　　D．8

2.（2023·全国·高三专题练习）已知P是半圆C：$\sqrt{2y-y^2}=-x$上的点，Q是直线$x-y-1=0$上的一点，则$|PQ|$的最小值为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.（2023·北京市第十二中学三模）已知直线l过圆$x^2-2x+y^2=0$的圆心，且与直线$2x+y-3=0$垂直，则l的方程为（　　）

A．$x-2y+1=0$　　B．$x+2y-1=0$

C．$2x+y-2=0$　　D．$x-2y-1=0$

4.（2023·河南·宝丰县第一高级中学模拟预测（理））已知p：$t>1$，q：关于x，y的方程$x^2+y^2-6tx+8ty+25=0$表示圆，则p是q的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5.（2023·全国·高三专题练习）已知$A\left(2,0\right),B\left(3,3\right),C\left(-1,1\right)$，则$\triangle ABC$的外接圆的一般方程为（　　）

A．$x^2+y^2-2x+4y=0$　　B．$x^2+y^2-2x+4y+2=0$

C．$x^2+y^2-2x-4y=0$　　D．$x^2+y^2-2x-4y+1=0$

6.（2023·全国·高三专题练习）已知集合$A=\left\{(x,y)\middle|y\le\sqrt{3-x^2},x,y\in N\right\}$，则集合A中元素的个数为（　　）

A．3　　B．4

C．5　　D．6

7.（2023·全国·高三专题练习）已知M是圆$C:x^2+y^2=1$上一个动点，且直线$l_1:mx-y-3m+1=0(m\in\mathrm{R})$与直线$l_2:x+my-3m-1=0(m\in\mathrm{R})$相交于点$P$，则$|PM|$的取值范围是（　　）

A．$\left[\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+1\right]$　　B．$\left[\sqrt{2}-1,3\sqrt{2}+1\right]$

C．$\left[\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}+1\right]$　　D．$\left[\sqrt{2}-1,3\sqrt{3}+1\right]$

8.（2023·全国·高三专题练习）已知直线$x-y+m=0$与圆C：$x^2+y^2+4y=0$相交于A，B两点，若$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，则$m$的值为（　　）

A．-4或0　　B．-4或4　　C．0或4　　D．-4或2

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）已知定点$A\left(-1,0\right)$、$B\left(1,0\right)$，P是动点且直线PA、PB的斜率之积为$\lambda\left(\lambda\neq 0\right)$，则动点$P$的轨迹可能是（　　）

A．圆的一部分　　　B．椭圆的一部分　　C．双曲线的一部分　D．抛物线的一部分

10．（2023·全国·高三专题练习）已知圆M的一般方程为$x^2+y^2-8x+6y=0$，则下列说法正确的是（　　）

A．圆M的圆心为$(4,3)$　　　　B．圆M的半径为5

C．圆M被x轴截得的弦长为6　　D．圆M被y轴截得的弦长为6

11．（2023·全国·高三专题练习）已知圆C关于y轴对称，经过点$(1,0)$且被x轴分成两段，弧长比为$1:2$，则圆C的方程为（　　）

A．$x^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{3}$　　　　B．$x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{3}$

C．$(x-\sqrt{3})^2+y^2=\frac{4}{3}$　　　　D．$(x+\sqrt{3})^2+y^2=\frac{4}{3}$

12．（2023·全国·高三专题练习）已知圆C被x轴分成两部分的弧长之比为$1:2$，且被y轴截得的弦长为4，当圆心C到直线$x+\sqrt{5}y=0$的距离最小时，圆C的方程为（　　）

A．$\left(x+4\right)^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=20$　　　　B．$\left(x-4\right)^2+\left(y+\sqrt{5}\right)^2=20$

C．$\left(x+4\right)^2+\left(y+\sqrt{5}\right)^2=20$　　　　D．$\left(x-4\right)^2+\left(y-\sqrt{5}\right)^2=20$

三、填空题

13．（2023·全国·高三专题练习（文））圆心为$C(-1,2)$，且截直线$x+3y+5=0$所得弦长为$2\sqrt{6}$的圆的方程为___________.

14．（2023·全国·高三专题练习（文））已知圆C的圆心为C（1，1），且经过直线$x+y=4$上的点P，则周长最小的圆C的方程是________________.

15．（2023·全国·高三专题练习（理））若不同的四点A（5，0），B（－1，0），C（－3，3），D（a，3）共圆，则a的值为________.

16．（2023·上海·模拟预测）设直线系$M:(x-1)\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1(0\leq\theta\leq 2\pi)$，对于下列四个命题：

①M中所有直线均经过一个定点；

②存在定点P不在M中的任一条直线上；

③对于任意整数$n(n\geq 3)$，存在正n边形，使其所有边均在M中的直线上；

④M中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题的序号是_________（写出所有真命题的序号）

四、解答题

17．（2023·陕西·武功县普集高级中学高三阶段练习（理））已知圆C经过点A（2，-1），和直线$x+y=1$相切，且圆心在直线$y=-2x$上．

（1）求圆 C 的方程；

（2）已知直线 l 经过原点，并且被圆 C 截得的弦长为 2，求直线 l 的方程

18．（2023·全国·高三专题练习）已知圆 C 经过点 $A(0,2),B(2,0)$，圆 C 的圆心在圆 $x^2+y^2=2$ 的内部，且直线 $3x+4y-5=0$ 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$．点 P 为圆 C 上异于 A，B 的任意一点，直线 PA 与 x 轴交于点 M，直线 PB 与 y 轴交于点 N.

（1）求圆 C 的方程；

（2）若直线 $y=x+1$ 与圆 C 交于 A_1，A_2 两点，求 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}$．

19．（2023·全国·高三专题练习）已知圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线 l：$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0(m\in\mathrm{R})$.

（1）证明：不论 m 为何值时，直线 l 恒过定点；

（2）求直线 l 被圆 C 截得的弦长最小时的方程.

20．（2023·全国·高三专题练习）已知动点 P 到定点 $F(1,0)$ 的距离与 P 到定直线 l：$x=4$ 的距离比值是 $\frac{1}{2}$．

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）曲线 C 与 x 轴交于 A、B 两点，直线 AP 和 BP 与直线 l：$x=4$ 分别交于点 M，N，试探究以 MN 为直径的圆是否恒过定点，若是，求出所有定点的坐标；若否，请说明理由.

21．（2023·全国·高三专题练习）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 Γ：$y=x^2-mx+2m$（$m\in R$）与 x 轴交于不同的两点 A，B，曲线 Γ 与 y 轴交于点 C.

（1）是否存在以 AB 为直径的圆过点 C？若存在，求出该圆的方程；若不存在，请说明理由；

（2）求证：过 A，B，C 三点的圆过定点．

22．（2023·全国·高三专题练习）圆 $C: x^2-(1+a)x+y^2-ay+a=0$．

（1）若圆 C 与 y 轴相切，求圆 C 的方程；

（2）求证：不论 a 为何值，圆 C 必过两定点；

（3）已知 $a>1$，圆 C 与 x 轴相交于两点 M，N（点 M 在点 N 的左侧）．过点 M 任作一条与 x 轴不重合的直线与圆 $O: x^2+y^2=9$ 相交于两点 A，B．问：是否存在实数 a，使得 $\angle ANM=\angle BNM$？若存在，求出实数 a 的值，若不存在，请说明理由．

专题35 圆的方程

【考点预测】

知识点一：基本概念

平面内到定点的距离等于定长的点的集合（轨迹）叫圆.

知识点二：基本性质、定理与公式

1．圆的四种方程

（1）圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心坐标为（a，b），半径为$r(r>0)$

（2）圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，圆心坐标为$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，半径$r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

（3）圆的直径式方程：若$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则以线段AB为直径的圆的方程是$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

（4）圆的参数方程：

①$x^2+y^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）；

②$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$的参数方程为$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）.

注意： 对于圆的最值问题，往往可以利用圆的参数方程将动点的坐标设为$(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$（$\theta$为参数，$(a,b)$为圆心，$r$为半径），以减少变量的个数，建立三角函数式，从而把代数问题转化为三角问题，然后利用正弦型或余弦型函数的有界性求解最值.

2．点与圆的位置关系判断

（1）点$P(x_0,y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系：

①$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2\Leftrightarrow$点$P$在圆外；

②$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\Leftrightarrow$点$P$在圆上；

③$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\Leftrightarrow$点$P$在圆内.

（2）点$P(x_0,y_0)$与圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的位置关系：

①$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0\Leftrightarrow$点$P$在圆外；

②$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0\Leftrightarrow$点$P$在圆上；

③$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0\Leftrightarrow$点$P$在圆内.

【题型归纳目录】

题型一：求圆多种方程的形式

题型二：直线系方程和圆系方程

题型三：与圆有关的轨迹问题

题型四：用二元二次方程表示圆的一般方程的充要条件

题型五：点与圆的位置关系判断

题型六：数形结合思想的应用

题型七：与圆有关的对称问题

题型八：圆过定点问题

【典型例题】

题型一：求圆多种方程的形式

例 1．已知$\odot O$的圆心是坐标原点O，且被直线$2x-y+5=0$截得的弦长为4，则$\odot O$的方程为（　　）

A．$x^2+y^2=4$　　　　B．$x^2+y^2=8$

C．$x^2+y^2=8$　　　　D．$x^2+y^2=9$

答案：D

【解析】由题意，设圆$\odot O$的标准方程为$x^2+y^2=r^2$，

则圆心$O(0,0)$到直线$2x-y+5=0$的距离为$d=\dfrac{5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，

又由圆$\odot O$被直线$2x-y+5=0$截得的弦长为4，

可得$2\sqrt{r^2-d^2}=4$，化简得$r^2-(\sqrt{5})^2=4$，解得$r^2=9$，

即圆的方程为$x^2+y^2=9$．

故选：D．

例 2．过点（7，-2）且与直线$2x-3y+6=0$相切的半径最小的圆方程是（　　）

A．$(x-5)^2+(y+1)^2=5$　　　　B．$(x-5)^2+(y-1)^2=13$

C．$(x-4)^2+(y+4)^2=13$　　　　D．$(x-1)^2+(y+6)^2=52$

答案：B

【解析】过点$A(7,-2)$作直线$2x-3y+6=0$的垂线，垂足为B，

则以AB为直径的圆为直线$2x-3y+6=0$相切的半径最小的圆，

其中$|AB|=\dfrac{|2\times7+6+6|}{\sqrt{4+9}}=2\sqrt{13}$，设$B(a,b)$，

则$\begin{cases}\dfrac{b+2}{a-7}\times\dfrac{2}{3}=-1\\2a-3b+6=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$，

故 AB 的中点，即圆心为$\left(\frac{7+3}{2},\frac{4-2}{2}\right)$，即$(5,1)$，

故该圆为$(x-5)^2+(y-1)^2=13$

故选：B

例 3．若圆 C 与直线l_1：$x+y=0$和l_2：$x+y-8=0$都相切，且圆心在 y 轴上，则圆 C 的方程为（　　）

A．$x^2+(y+4)^2=8$　　B．$x^2+(y-4)^2=8$

C．$x^2+(y+4)^2=16$　　D．$x^2+(y-4)^2=16$

答案：B

【解析】因为直线l_1：$x+y=0$和l_2：$x+y-8=0$的距离$d=\frac{|-8-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$，由圆 C 与直线l_1：$x+y=0$和l_2：$x+y-8=0$都相切，所以圆的半径为$2\sqrt{2}$，又圆心在y轴上，设圆心坐标为$(0,b)$，$(0<b<8)$，所以圆心到直线l_1的距离等于半径，即$\frac{|b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，所以$b=4$或$b=-4$（舍去），所以圆心坐标为$(0,4)$，故圆的方程为$x^2+(y-4)^2=8$；

故选：B

例 4．过点$A(3,1)$的圆C与直线$x-y=0$相切于点$B(1,1)$，则圆C的方程为（　　）

A．$(x-2)^2+y^2=2$　　B．$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

C．$(x-3)^2+(y-4)^2=9$　　D．$(x-3)^2+(y+1)^2=8$

答案：A

【解析】设圆心为(a,b)，半径为r，

则$\begin{cases}(a-3)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(b-1)^2\\ \frac{b-1}{a-1}=-1\end{cases}$，

解得$a=2,b=0$，所以圆心为$(2,0)$，

半径$r=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$．

所以圆C的方程为$(x-2)^2+y^2=2$．

例 5．已知直线$l:2x-y+2=0$与以点$C(2,1)$为圆心的圆相交于 A，B 两点，且$CA\perp CB$，则圆 C 的方程为（　　）

A．$(x-2)^2+(y-1)^2=25$　　B．$(x-2)^2+(y-1)^2=20$

C．$(x-2)^2+(y-1)^2=10$　　D．$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

答案：C

【解析】由题意，$\triangle ACB$ 为等腰直角三角形，

所以圆心 $C(2,1)$ 到直线 $l:2x-y+2=0$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，即 $\frac{|2\times 2-1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，解得 $r=\sqrt{10}$，

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$，

故选：C.

例 6．直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A，B，以线段 AB 为直径的圆的方程为（　　）

A．$x^2+y^2-4x-2y=0$　　　　B．$x^2+y^2-4x-2y-1=0$

C．$x^2+y^2-4x-2y+1=0$　　　　D．$x^2+y^2-2x-4y=0$

答案：A

【解析】由直线截距式方程知：$A(4,0)$，$B(0,2)$，

所以 AB 中点坐标为 $(2,1)$，且 $|AB|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

所以以 AB 为直径的圆的圆心为 $(2,1)$，半径为 $\sqrt{5}$，

所以以线段 AB 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，

化为一般方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$.

故选：A.

例 7．过点 $A(1,-1)$，$B(-1,1)$，且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是（　　）

A．$(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　　　B．$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

C．$(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　　　D．$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

答案：A

【解析】因为过点 $A(1,-1)$ 与 $B(-1,1)$，

所以线段 AB 的中点坐标为 $(0,0)$，$k_{AB}=\frac{1-(-1)}{-1-1}=-1$，

所以线段 AB 的中垂线的斜率为 $k=1$，

所以线段 AB 的中垂线的方程为 $y=x$，

又因为圆心在直线 $x+y-2=0$ 上，

所以 $\begin{cases}x+y-2=0\\ y=x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$，

所以圆心为 $(1,1)$，$r=\sqrt{(1-1)^2+(1+1)^2}=2$

所以圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

故选：A

例 8．过点$P(4,2)$作圆$x^2+y^2=4$两条切线，切点分别为A、B，O为坐标原点，则$\triangle OAB$的外接圆方程是（　　）

A．$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　　　　B．$(x-4)^2+(y-2)^2=20$

C．$(x+2)^2+(y+1)^2=5$　　　　D．$(x+4)^2+(y+2)^2=20$

答案：A

【解析】由题意知O、A、B、P四点共圆，从而OP的中点坐标$(2,1)$为所求圆的圆心，

$\frac{1}{2}|OP|=\sqrt{5}$为所求圆的半径，所以所求圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

故选：A.

例 9．已知三个点$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(4,2)$，则$\triangle ABC$的外接圆的圆心坐标是

___________.

答案：（1，3）

【解析】设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}F=0\\4+2D+F=0\\20+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}D=-2\\E=-6\\F=0\end{cases}$，

所以圆方程为$x^2-2x+1+y^2-6y+9=10$，即$(x-1)^2+(y-3)^2=10$，

所以圆心坐标为$(1,3)$.

故答案为：$(1,3)$.

例 10．圆心在直线$y=-2x$上，并且经过点$A(2,-1)$，与直线$x+y=1$相切的圆C的方程是______.

答案：$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

【解析】因为所求圆的圆心在直线$y=-2x$上，

所以可设圆心为$C(a,-2a)$，半径为r，

由题意知，$r=|AC|=\sqrt{(a-2)^2+(-2a+1)^2}$，

又圆C与直线$x+y=1$相切，由点到直线的距离公式可得，

$d=\frac{|a-2a-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}=r$，

所以$\sqrt{(a-2)^2+(2a-1)^2}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$，

解得$a=1$，$r=\sqrt{2}$，

所以所求圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

故答案为：$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

【方法技巧与总结】

（1）求圆的方程必须具备三个独立的条件，从圆的标准方程上来讲，关键在于求出圆心坐标（a，b）和半径 r；从圆的一般方程来讲，必须知道圆上的三个点．因此，待定系数法是求圆的方程常用的方法．

（2）用几何法来求圆的方程，要充分运用圆的几何性质，如圆心在圆的任一条弦的垂直平分线上，半径、弦心距、弦长的一半构成直角三角形等．

题型二：直线系方程和圆系方程

例 11．过圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 与 $x^2+y^2-4x+2y=0$ 的交点，且圆心在直线 $l:2x+4y-1=0$ 上的圆的方程是_______．

答案：$x^2+y^2-3x+y-1=0$

【解析】

设圆的方程为 $x^2+y^2-4x+2y+\lambda(x^2+y^2-2y-4)=0(\lambda\neq-1)$,

则 $(1+\lambda)x^2-4x+(1+\lambda)y^2+(2-2\lambda)y-4\lambda=0$,

即 $x^2+y^2-\dfrac{4}{1+\lambda}x+\dfrac{2-2\lambda}{1+\lambda}y-\dfrac{4\lambda}{1+\lambda}=0$，所以圆心坐标为 $\left(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{\lambda-1}{1+\lambda}\right)$,

把圆心坐标 $\left(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{\lambda-1}{1+\lambda}\right)$ 代入 $2x+4y-1=0$，可得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$,

所以所求圆的方程为 $x^2+y^2-3x+y-1=0$.

故答案为：$x^2+y^2-3x+y-1=0$.

例 12．已知圆 $C_1:x^2+y^2-2x-3=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 相交于 A、B 两点．

（1）求公共弦 AB 所在直线方程;

（2）求过两圆交点 A、B，且过原点的圆的方程．

【解析】（1）$x^2+y^2-2x-3=0$，①

$x^2+y^2-4x+2y+3=0$，②

①-②得 $2x-2y-6=0$

即公共弦 AB 所在直线方程为 $x-y-3=0$.

（2）设圆的方程为 $x^2+y^2-2x-3+\lambda(x^2+y^2-4x+2y+3)=0$

即 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-(2+4\lambda)x+2\lambda y-3+3\lambda=0$

因为圆过原点，所以 $-3+3\lambda=0$，$\lambda=1$

所以圆的方程为 $x^2+y^2-3x+y=0$

例 13．已知圆 $C_1: x^2+y^2+6x-16=0, C_2: x^2+y^2-4x-5=0$．求证：对任意不等于 -1 的实数 λ，方程 $x^2+y^2+6x-16+\lambda\left(x^2+y^2-4x-5\right)=0$ 是通过两个已知圆交点的圆的方程．

【解析】若 (m,n) 是圆 C_1、圆 C_2 的交点坐标，则 $m^2+n^2+6m-16=0$ 且

$m^2+n^2-4m-5=0$，

所以 (m,n) 必在 $x^2+y^2+6x-16+\lambda\left(x^2+y^2-4x-5\right)=0$ 上，

又 $x^2+y^2+6x-16+\lambda\left(x^2+y^2-4x-5\right)=(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(6-4\lambda)x-16-5\lambda=0$，

所以 $(x+\dfrac{3-2\lambda}{1+\lambda})^2+y^2=\dfrac{9\lambda^2+9\lambda+25}{(1+\lambda)^2}$，则在 $\lambda\neq-1$ 时 $\dfrac{9(\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{91}{4}}{(1+\lambda)^2}>0$，方程表示圆，

综上，对任意不等于 -1 的实数 λ，方程 $x^2+y^2+6x-16+\lambda\left(x^2+y^2-4x-5\right)=0$ 是通过两个已知圆交点的圆的方程．

例 14．已知圆 $C_1: x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 和圆 $C_2: x^2+y^2+2x=0$．

（1）求证：两圆相交；

（2）求过点 $(-2,3)$，且过两圆交点的圆的方程．

【解析】（1）证明：∵圆 $C_1: x^2+y^2+4x-4y+4=0$，即 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$，表示以 $C_1(-2,2)$ 为圆心，半径等于 2 的圆，圆 $C_2: x^2+y^2+2x=0$，即 $(x+1)^2+y^2=1$，表示以 $C_2(-1,0)$ 为圆心，半径等于 1 的圆，所以两圆的圆心距 $C_1C_2=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，大于两圆的半径之差且小于两圆的半径之和，故两圆相交．

（2）设过两圆交点的圆的方程为 $x^2+y^2+4x-4y+4+\lambda\left(x^2+y^2+2x\right)=0$．

把点 $(-2,3)$ 代入，求得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$．

故所求圆的方程为 $x^2+y^2+4x-4y+4+\dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2+2x\right)=0$，

即 $x^2+y^2+\dfrac{7}{2}x-3y+3=0$．

【方法技巧与总结】

求过两直线交点（两圆交点或直线与圆交点）的直线方程（圆系方程）一般不需求其交点，而是利用它们的直线系方程（圆系方程）．

（1）直线系方程：若直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交于点 P，则过点 P 的直线系方程为：$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0\ (\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq0)$

简记为：$\lambda_1l_1+\lambda_2l_2=0(\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq0)$

当 $\lambda_1\neq0$ 时，简记为：$l_1+\lambda l_2=0$（不含 l_2）

（2）圆系方程：若圆 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相交于 A，B 两点，则过 A，B 两点的圆系方程为：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda \neq -1)$

简记为：$C_1+\lambda C_2=0(\lambda \neq -1)$，不含 C_2

当 $\lambda=-1$ 时，该圆系退化为公共弦所在直线（根轴）$l:(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$

注意：与圆 C 共根轴 l 的圆系 $C_\lambda: C+\lambda l=0$

题型三：与圆有关的轨迹问题

例 15．已知点 $A(0,1)$，$B(2,-1)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1$，则点 P 的轨迹为

__________.

答案：$(x-1)^2+y^2=3$

【解析】$\overrightarrow{PA}=(-x,1-y),\overrightarrow{PB}=(2-x,-1-y)$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-x(2-x)-(1-y)(1+y)=-2x+x^2-1+y^2=1$，

化简得：$(x-1)^2+y^2=3$，所以，点 P 的轨迹为圆：$(x-1)^2+y^2=3$

故答案为：$(x-1)^2+y^2=3$

例 16．古希腊几何学家阿波罗尼斯证明过这样一个命题：平面内到两定点距离之比为常数 $k(k>0,k\neq 1)$ 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆．在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-4,0)$，$B(2,0)$，点 M 满足 $\dfrac{|MA|}{|MB|}=2$，则点 M 的轨迹方程为（　　）

A．$(x+4)^2+y^2=16$　B．$(x-4)^2+y^2=16$　C．$x^2+(y+4)^2=16$　D．$x^2+(y-4)^2=16$

答案：B

【解析】$\because \dfrac{|MA|}{|MB|}=2$，即 $|MA|=2|MB|$

设 $M(x,y)$，则 $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，整理得 $(x-4)^2+y^2=16$

故选：B．

例 17．若圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:(x-a)^2+(y-b)^2=1$ 的公共弦 AB 的长为 1，则下列结论正确的有（　　）

A．$a^2+b^2=1$

B．$a^2+b^2=14$

C．AB 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$

D．AB 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2=\dfrac{9}{16}$

答案：C

【解析】两圆方程相减可得直线 AB 的方程为 $a^2+b^2-2ax-2by=0$，

即 $2ax+2by-a^2-b^2=0$，

因为圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径为 1，

且公共弦 AB 的长为 1，则 $C_1(0,0)$ 到直线

$2ax+2by-a^2-b^2=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{4(a^2+b^2)}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a^2+b^2=3$，

故 A、B 错误；

由圆的性质可知直线 C_1C_2 垂直平分线段 AB，

所以 $C_1(0,0)$ 到直线 $2ax+2by-a^2-b^2=0$ 的距离

即为 AB 中点与点 C_1 的距离，设 AB 中点坐标为 (x,y)，

因此 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$，故 C 正确，D 错误；

故选：C

例 18．已知圆 $O:x^2+y^2=1$，直线 $l:x+y-2=0$，过 l 上的点 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 A,B，则弦 AB 中点 M 的轨迹方程为（　　）

A．$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$　　　　B．$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}(x^2+y^2\neq 0)$

C．$\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$　　　　D．$\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}(x^2+y^2\neq 0)$

答案：B

【解析】易得弦 AB 中点 M 为直线 OP 和 AB 的交点，设 $P(p,2-p),p\neq 0,2$，则直线 OP 的方程为 $y=\dfrac{2-p}{p}x$，又 PA,PB 均与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相切，故 $OA\perp PA,OB\perp PB$，故 O,A,B,P 四点共圆，且 AB 为以 OP 为直径的圆与圆 O 的公共弦．又以 OP 为直径的圆的方程为 $(x-0)(x-p)+(y-0)(y-2+p)=0$，即 $x^2-px+y^2-(2-p)y=0$，故 AB 的方程为 $\begin{cases}x^2-px+y^2-(2-p)y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}$ 相减，即 $1-px-(2-p)y=0$．又 $y=\dfrac{2-p}{p}x$，所以 $p=\dfrac{2x}{x+y}$

，代入$1-px-(2-p)y=0$有$1-\frac{2x^2}{x+y}-\left(2-\frac{2x}{x+y}\right)y=0$，化简得$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$．当$P(0,2)$时，$M\left(0,\frac{1}{2}\right)$；当$P(2,0)$时，$M\left(\frac{1}{2},0\right)$均满足方程．

又当$M(0,0)$时，$PA//PB$不满足题意．

综上有点M的轨迹方程为$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\neq 0\right)$

故选：B

例 19．已知A，B为圆$C:x^2+y^2-2x-4y+3=0$上的两个动点，P为弦AB的中点，若$\angle ACB=90°$，则点P的轨迹方程为（　　）

A．$(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}$　　　　B．$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

C．$(x+1)^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$　　　　D．$(x+1)^2+(y+2)^2=1$

答案：B

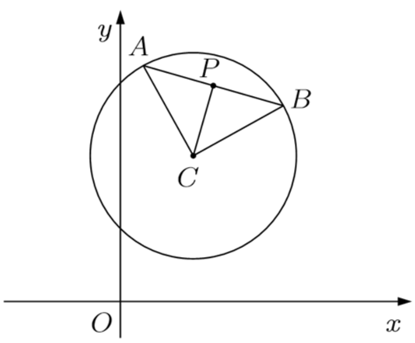
【解析】圆C即$(x-1)^2+(y-2)^2=2$，半径$r=\sqrt{2}$

因为$CA\perp CB$，所以$AB=\sqrt{2}r=2$

又P是AB的中点，所以$CP=\frac{1}{2}AB=1$

所以点P的轨迹方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

故选：B



例 20．**（多选题）**已知$a\in\mathbf{R}$，过定点A的直线为$l_1:ax+y=0$与过定点B的直线$l_2:x-ay-a+1=0$，两条动直线的交点为P，则（　　）

A．定点$A(0,1)$

B．定点$B(-1,-1)$

C．点P的轨迹方程为$x^2+y^2+x+y=0$

D．$\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|$的最大值为8

答案：BC

【解析】对于 A 选项，直线 $l_1: ax+y=0$ 过定点 $A(0,0)$，A 错；

对于 B 选项，直线 l_2 的方程可化为 $(x+1)-a(y+1)=0$，

由 $\begin{cases} x+1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$，故定点 $B(-1,-1)$，B 对；

对于 C 选项，$\because a\times 1+1\times(-a)=0$，所以，$l_1\perp l_2$，所以，$PA\perp PB$，

线段 AB 的中点为 $E\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，且 $|AB|=\sqrt{2}$，所以，$|PE|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以，点 P 的轨迹是以点 E 为圆心，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆，

所以，点 P 的轨迹方程为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，即 $x^2+y^2+x+y=0$，C 对；

对于 D 选项，设点 $P(x,y)$，$\overrightarrow{PA}=(-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-1-y)$，

所以，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=(-3x-2,-3y-2)$，

所以，$\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{(3x+2)^2+(3y+2)^2}=3\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}$，

记点 $F\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，则 $\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|=3\left|\overrightarrow{PF}\right|$，

因为 $\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EF}$ 且 $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

所以，$\left|\overrightarrow{PF}\right|=\left|\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EF}\right|\le\left|\overrightarrow{PE}\right|+\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以，$\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|=3\left|\overrightarrow{PF}\right|\le 2\sqrt{2}$，当且仅当 E、P、F 三点共线且点 E 在线段 FP 上时，

等号成立，故 $\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}\right|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$，D 错.

故选：BC.

例 21.（多选题）在平面直角坐标系内，已知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，C 是平面内一动点，则下列条件中使得点 C 的轨迹为圆的有（　　）

A．$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$　　　　B．$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{BC}\right|$

C．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　　　D．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

答案：BCD

【解析】设点 C 的坐标为 $(x，y)$ 则 $\overrightarrow{AC}=(x+1,y),\overrightarrow{BC}=(x-1,y)$

对于 A：由 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ 得 $(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+y^2$，即 $x=0$，故 A 错误；