【巩固卷】期中测评卷 单元测试A-沪教版（2020）选择性必修第一册

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、填空题

1．过点 $A(2,3)$，且法向量是 $\vec{n}=(4,3)$ 的直线的点法向式方程是___.

2．若直线 $x+2y+3=0$ 与直线 $2x+my+10=0$ 平行，则这两条直线间的距离是__________.

3．在平面直角坐标系中，若双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的右焦点恰好是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，则 $p=$________.

4．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e=\dfrac{5}{4}$，实半轴长为4，则双曲线的方程为________.

5．若圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 与直线 $x+y+1=0$ 相交于 A、B 两点，则弦 $|AB|$ 的长为_____.

6．根据抛物线的光学性质，从抛物线的焦点发出的光，经抛物线反射后光线都平行于抛物线的轴，已知抛物线 $y^2=2x$，若从点 Q（3，2）发射平行于 x 轴的光射向抛物线的 A 点，经 A 点反射后交抛物线于 B 点，则 $|AB|=$______.

7．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 P，Q 在椭圆 C 上，O 为坐标原点，且 $\overrightarrow{PF}=4\overrightarrow{FQ}$，$|OP|=|OF|$，则椭圆的离心率是_____.

8．类比教材中对圆双曲线的“对称性”和“范围”的研究，写出曲线 $C:\sqrt{4-x^2}+y^3=1$ 的对称性和所在的范围为________.

9．在抛物线 $y^2=4x$ 上任取一点A (不为原点)，F 为抛物线的焦点，连接 AF 并延长交抛物线于另一点 B, 过 A,B 分别作准线的垂线，垂足分别为 C,D. 记线段 CD 的中点为 T, 则 $\triangle ATB$ 面积的最小值为_____.

10．过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点 $F(-c,0)$ 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 E，延长 FE 交抛物线 $y^2=4cx$ 于点 P，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OP}\right)$，则双曲线的离心率为______.

11．已知曲线$C_1: y=\sqrt{1-x^2}$与曲线$C_2: y=\sqrt{2-x^2}$，长度为1的线段AB的两端点A、B分别在曲线C_1、C_2上沿顺时针方向运动，若点A从点$\left(-1,0\right)$开始运动，点B到达点$\left(\sqrt{2},0\right)$时停止运动，则线段AB所扫过的区域的面积为_____.

12. 已知点$M(\sqrt{5},\frac{4}{3})$是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的一点，$F_1,F_2$是椭圆的左、右焦点，且$\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，则椭圆$C$的方程是.若圆$x^2+y^2=4$的切线与椭圆$C$相交于$M$点，则$|MN|$的最大值是______.

二、单选题

13．当实数m变化时，方程$x=my-m^2$表示无数条直线，对某些点P，它在且只在这些直线中的某一条上，假设这些点P组成集合M，则点$P_1\left(1,2\right)$、$P_2\left(-3,2\right)$与M的关系为（　）

A．$P_1\in M$，$P_2\in M$　　B．$P_1\in M$，$P_2\notin M$

C．$P_1\notin M$，$P_2\in M$　　D．$P_1\notin M$，$P_2\notin M$

14．直线$\sqrt{3}x-y=0$与圆 $M: x^2+y^2-mx+\frac{1}{4}=0$相切，则实数$m$的值是（　）

A．±1　　B．±2　　C．±4　　D．±8

15．已知A，B为平面内两定点，过该平面内动点M作直线AB的垂线，垂足为N.若$\overrightarrow{MN}^2=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{NB}$，则动点$M$的轨迹是（　）

A．圆　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．双曲线

16．已知过点D（－2，0）的直线l与椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$相交于不同的两点A、B，M是弦AB的中点，则 $\frac{|MD|}{|MA|}$的最小值为（　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

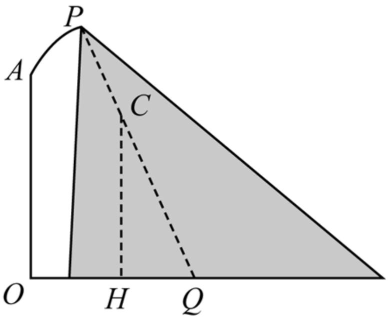
三、解答题

17．已知直线$l_1: x-2y+4=0$，$l_2: x+y-2=0$，

(1)求两条直线l_1、l_2夹角的大小；

(2)求直线l_1关于直线l_2对称的直线的方程.

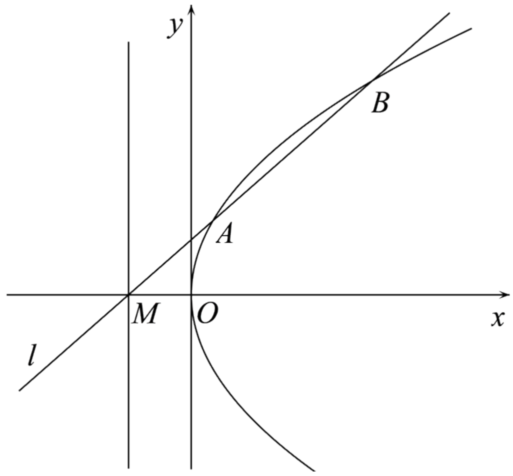
18．如图，在宽为14的路边安装路灯，灯柱OA高为8，灯杆PA是半径为r的圆C的一段劣弧．路灯采用锥形灯罩，灯罩顶P到路面的距离为10，到灯柱所在直线的距离为2．设Q为圆心C与P连线与路面的交点．

（1）当r为何值时，点Q恰好在路面中线上？

（2）记圆心C在路面上的射影为H，且H在线段OQ上，求HQ的最大值．

19．已知抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的准线与x轴交于点M，过点M的直线l与抛物线交于A、B两点，设$A\left(x_1,y_1\right)$到准线的距离为d.

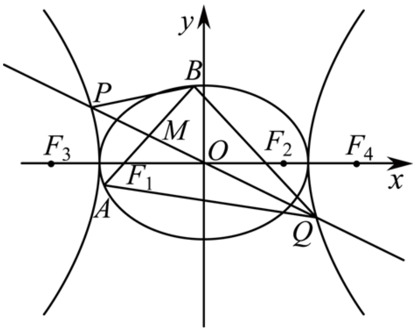


(1)若$y_1=d=3$，求抛物线的标准方程；

(2)若$2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$，求直线$l$的斜率.

20．如图，O为坐标原点，椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，离心率为$e_1$；双曲线$C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点分别为$F_3$、$F_4$，离心率为$e_2$，已知$e_1e_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且$\left|F_2F_4\right|=\sqrt{3}-1$．过$F_1$作$C_1$的不垂直于$y$轴的弦$AB$，$M$为$AB$的中点，直线$OM$与$C_2$交于

P、Q两点.

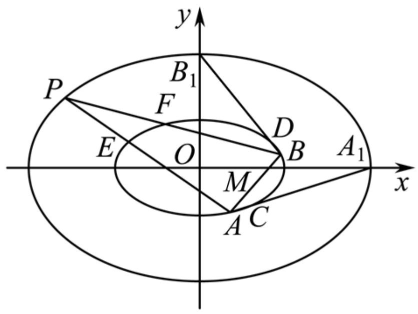


(1)求C_1、C_2的方程；

(2)若四边形$APBO$为平行四边形，求直线AB的方程；

(3)求四边形$APBQ$面积的最小值.

21．已知椭圆$E_1:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1, E_2:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,a<4)$的离心率相同.点$P(x_0,y_0)$在椭圆$E_1$上，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$在椭圆$E_2$上.



(1)若$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OQ}$，求点$Q$的轨迹方程；

(2)设E_1的右顶点和上顶点分别为A_1、B_1，直线A_1C、B_1D分别是椭圆E_2的切线，C、D为切点，直线A_1C、B_1D的斜率分别是k_1、k_2，求$k_1^2\cdot k_2^2$的值；

(3)设直线PA、PB分别与椭圆E_2相交于E、F两点，且$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{EF}(t\in\mathbf{R})$，若$M$是$AB$中点，求证：$P$、$O$、$M$三点共线（$O$为坐标原点）.

参考答案：

1．$4(x-2)+3(y-3)=0$

【分析】利用直线的点法式方程写出即可.

【详解】根据直线的点法式方程可得直线的点法式方程：$4(x-2)+3(y-3)=0$.

故答案为：$4(x-2)+3(y-3)=0$

2．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$/$\frac{2}{5}\sqrt{5}$

【分析】运用两直线平行求得 m 的值，再运用两平行线间的距离公式可求得结果.

【详解】由直线 $x+2y+3=0$ 与直线 $2x+my+10=0$ 平行，

可知 $m-2\times 2=0$，即 $m=4$，

故直线 $2x+my+10=0$ 为 $2x+4y+10=0$，

直线 $x+2y+3=0$ 变形得 $2x+4y+6=0$，

故这两条直线间的距离为 $d=\frac{|6-10|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3．$2\sqrt{3}$

【分析】确定双曲线右焦点，得到 $\frac{p}{2}=\sqrt{3}$，解得答案.

【详解】双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的右焦点为 $\left(\sqrt{3},0\right)$，则 $\frac{p}{2}=\sqrt{3}$，$p=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.

4．$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

【分析】由离心率求出 c，再由 $c^2=a^2+b^2$ 求出 b 可得双曲线方程.

【详解】由已知可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{5}{4}\\ a=4\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，即得 $b=3$，所以双曲线方程为: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

故答案为: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

5．$2\sqrt{2}$

【分析】根据题意，求得圆心坐标和半径，结合圆的弦长公式，即可求解.

【详解】由圆 $x^2+y^2-2x-3=0$，可化为 $(x-1)^2+y^2=4$，可得圆心为 $C(1,0)$，半径为 $r=2$，

则圆心$C(1,0)$到直线$x+y+1=0$的距离为$d=\frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，

所以弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

6．$\frac{25}{8}$

【分析】由题意求出A点坐标，由于直线AB过焦点，利用点斜式方程求出直线AB方程，联立抛物线方程，由韦达定理求出点B坐标，利用两点间的距离求出$|AB|$即可.

【详解】由条件可知AQ与x轴平行，令$y_A=2$，可得$x_A=2$，故A点坐标为$(2,2)$，

因为l_{AB} 经过抛物线焦点$F\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以$l_{AB}$ 方程为$y-0=\frac{2-0}{2-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

整理得$4x-3y-2=0$，联立$\begin{cases}y^2=2x\\4x-3y-2=0\end{cases}$，得$y^2-\frac{3}{2}y-1=0$，

$\Delta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\times1\times(-1)=\frac{25}{4}>0$，所以$y_A+y_B=\frac{3}{2}$，

又$y_A=2$，所以$y_B=-\frac{1}{2}$，$x_B=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$，

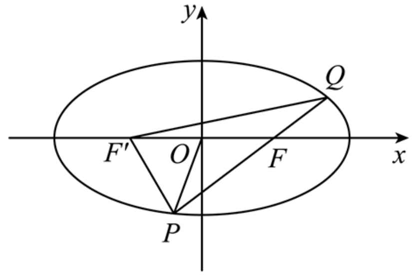
所以$|AB|=\sqrt{\left(2-\frac{1}{8}\right)^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{25}{8}$.

故答案为：$\frac{25}{8}$.

7．$\frac{\sqrt{13}}{5}$

【分析】根据题意，由条件可得$\triangle PFF'$为直角三角形，再结合椭圆的定义列出方程，由离心率的计算公式即可得到结果.

【详解】



设椭圆的左焦点为F'，设$|FQ|=m$，

因为$|OP|=|OF|$，所以$\triangle PFF'$为直角三角形且$\angle FPF'=90°$，

因为$\overrightarrow{PF}=4\overrightarrow{FQ}$，所以$|PF|=4m$，

因为$|PF'|+|PF|=2a$，$|QF'|+|QF|=2a$，所以$|QF'|=2a-m$，$|PF'|=2a-4m$，

所以$(2a-4m)^2+(5m)^2=(2a-m)^2$，解得$m=\dfrac{3}{10}a$，

所以$|PF'|=\dfrac{4}{5}a$，$|PF|=\dfrac{6}{5}a$，所以$\left(\dfrac{4}{5}a\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}a\right)^2=(2c)^2$，所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$，

即椭圆的离心率是$\dfrac{\sqrt{13}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{13}}{5}$.

8．关于y轴对称，$x\in[-2,2]$，$y\in[-1,1]$

【分析】根据$\sqrt{4-x^2}$有意义得出x的范围，再根据$1-\sqrt{4-x^2}$的范围得出y的范围；分别以$-x$代x，以$-y$代y，及以$-x$代x，$-y$代y，判断与原方程的关系即可得出对称性.

【详解】由$\sqrt{4-x^2}+y^3=1$得$x\in[-2,2]$，

因为$\sqrt{4-x^2}\in[0,2]$，

所以$y^3=1-\sqrt{4-x^2}\in[-1,1]$，即$y\in[-1,1]$，

在曲线方程中，以$-x$代x，得$\sqrt{4-x^2}+y^3=1$，与方程相同，所以曲线关于y轴对称；

以$-y$代y，得$\sqrt{4-x^2}-y^3=1$，与原方程不同，所以曲线不关于x轴对称；

以$-x$代x，$-y$代y，得$\sqrt{4-x^2}-y^3=1$，与原方程不同，所以曲线不是中心对称图形，

故答案为：关于y轴对称，$x\in[-2,2]$，$y\in[-1,1]$.

9．4

【分析】取AB的中点为M，连接MT，$S_{\triangle ATB}=\dfrac{1}{2}|TM||y_A-y_B|=\dfrac{1}{4}|AB||y_A-y_B|$可变形为用$y_Ay_B$表示，设直线方程为$x=my+1$，与抛物线方程联立，消元后应用韦达定理得$y_Ay_B,y_A+y_B$，代入$S_{\triangle ATB}$，再由基本不等式可得最小值.

【详解】焦点为$F(1,0)$，设直线AB方程为$x=my+1$，

由$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases} \Rightarrow y^2-4my-4=0 \Rightarrow y_Ay_B=-4$,

取AB的中点为M，连接MT，则$|AC|=|AF|$，$|BD|=|BF|$，$|MT|=\frac{1}{2}(|AC|+|BD|)=\frac{1}{2}|AB|$，

$S_{\triangle ATB}=\frac{1}{2}|TM||y_A-y_B|=\frac{1}{4}|AB||y_A-y_B|$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{{y_A}^2}{4}+1+\frac{{y_B}^2}{4}+1\right)\sqrt{{y_A}^2+{y_B}^2-2y_Ay_B}$

$\geq\frac{1}{4}\left(\frac{|y_Ay_B|}{2}+2\right)\sqrt{2|y_Ay_B|-2y_Ay_B}=4$

故$|y_A|=|y_B|=2$时面积最小为4.

故答案为：4．

【点睛】关键点点睛: 本题考查抛物线中与焦点弦有关的面积问题．解题关键是把抛物线的点到焦点的距离转化为到准线的距离，这样三角形的面积可以与焦点弦长联系，从而利用韦达定理求解.

10．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【分析】由向量的运算法则知E是PF中点，由此得$|OP|=|OF|=c$，抛物线的焦点与双曲线的右焦点重合，因此利用中位线性得$|PG|=2a$，从而由抛物线的可表示出P的点横坐标，从而得纵坐标，作$PH\perp x$轴，垂足为H，在$\triangle OPH$中由勾股定理得出a,c的方程，变形后可求得离心率e.

【详解】如图，双曲线的右焦点G也是抛物线的焦点，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OP})$，则$E$是$PF$中点，

又O是FG中点，所以$OE//PG$，$|PG|=2|OE|=2a$，

设$P(x,y)$，

过P作抛物线的准线的垂线PM，M是垂足，则$|PM|=x+c=|PG|=2a$，$x=2a-c$，

P在抛物线上，所以$y^2=4xc=4x(2a-c)$，

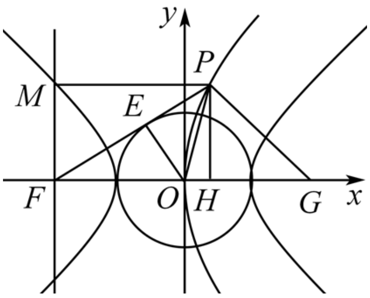
E是切点，$OE\perp FP$，所以$|OP|=|OF|=c$，

作$PH\perp x$轴，垂足为H，

由$|PH|^2+|OH|^2=|OP|^2$得$(2a-c)^2+4c(2a-c)=c^2$，整理得$4c^2-4ac-4a^2=0$，

所以$e^2-e-1=0$，$e=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）.

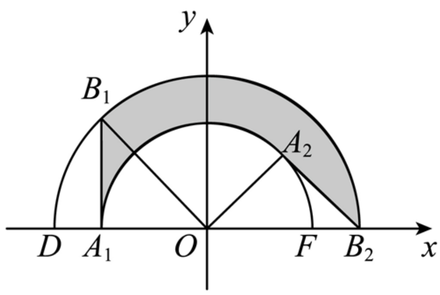
故答案为：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



11．$\dfrac{3\pi}{8}$/$\dfrac{3}{8}\pi$

【分析】根据已知条件知，曲线C_1与曲线C_2是两个半圆，分别求出起点、终点处时A、B的坐标，可得线段AB扫过的面积，进而通过三角形面积公式及扇形面积公式计算可得结果.

【详解】设A_1、B_1分别为A、B点的起点，A_2、B_2分别为A、B点运动的终点，则图中阴影部分即为线段AB扫过的面积.如图所示，



则$A_1(-1,0)$，$B_2(\sqrt{2},0)$，设$B_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，

∵曲线C_1方程：$y=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=1(y\geq 0)$，

曲线C_2方程：$y=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=2(y\geq 0)$，

$\begin{cases} {y_1}^2+(x_1-(-1))^2=1 \\ y_1=\sqrt{2-{x_1}^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=1 \end{cases}$，即：$B_1(-1,1)$，

$\begin{cases} {y_2}^2+(x_2-\sqrt{2})^2=1 \\ y_2=\sqrt{1-{x_2}^2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$，即：$A_2(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

记S_{C_1}为圆$x^2+y^2=1$的面积，S_{C_2}为圆$x^2+y^2=2$的面积，$S_{A_1DB_1}$为$\overset{\frown}{DB_1}$与A_1D、A_1B_1围成的面积，$S_{A_2B_2F}$为$\overset{\frown}{A_2F}$与B_2F、A_2B_2围成的面积，S_1为上半圆环的面积，S为线段AB

扫过的面积.

则 $S_1=\frac{1}{2}(S_{C_2}-S_{C_1})=\frac{1}{2}(2\pi-\pi)=\frac{1}{2}\pi$，

因为 $A_1B_1=1$，$OA_1=1$，$OB_1=\sqrt{2}$，所以 $A_1B_1^{\ 2}+OA_1^{\ 2}=OB_1^{\ 2}$，所以 $OA_1\perp A_1B_1$，所以

$\angle A_1OB_1=45^\circ$，

所以 $S_{A_1DB_1}=S_{\text{扇形}ODB_1}-S_{\triangle OA_1B_1}=\frac{1}{8}S_{C_2}-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$，

又因为 $A_2B_2=1$，$OA_2=1$，$OB_2=\sqrt{2}$，所以 $OA_2\perp A_2B_2$，所以 $\angle A_2OB_2=45^\circ$，

所以 $S_{A_2B_2F}=S_{\triangle OA_2B_2}-S_{\text{扇形}A_2OF}=\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{8}S_{C_1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$，

所以 $S=S_1-S_{A_1DB_1}-S_{A_2B_2F}=\frac{1}{2}\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{3\pi}{8}$.

故答案为：$\frac{3\pi}{8}$.

12．3

【分析】根据椭圆的几何性质可得方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，由圆的切线可得 $n^2=4+4m^2$，进而根据椭圆的弦长公式得 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\,\frac{12\sqrt{5}}{4m^2+9}$，利用换元以及不等式即可求解最值.

【详解】由 $M(\sqrt{5},\frac{4}{3})$ 和 $\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$ 可得 $c=\sqrt{5}$，$\frac{b^2}{a}=\frac{4}{3}$ 即 $a^2-b^2=5$，$b^2=\frac{4}{3}a$，解得 $a^2=9$，$b^2=4$，所以椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；

设圆 $x^2+y^2=4$ 的切线方程为 $x=my+n$，由 $\frac{|-n|}{\sqrt{1+m^2}}=2$ 得 $n^2=4+4m^2$，

联立 $\begin{cases}x=my+n\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 x 得 $\left(4m^2+9\right)y^2+8mny+4n^2-36=0$，

$\Delta=64m^2n^2-4\left(4m^2+9\right)\left(4n^2-36\right)=144\left(4m^2-n^2+9\right)=144\times5$，

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1+y_2=-\frac{8mn}{4m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{4n^2-36}{4m^2+9}$，

$|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}=\sqrt{1+m^2}\,\frac{12\sqrt{5}}{4m^2+9}$，

设 $\sqrt{1+m^2}=t\left(t\geq1\right)$，$|MN|=\frac{12\sqrt{5}t}{4t^2+5}=\frac{12\sqrt{5}}{4t+\frac{5}{t}}\leq\frac{12\sqrt{5}}{2\sqrt{4t\times\frac{5}{t}}}=3$，