

江西省临川实验学校 2024 年高三下学期第二次诊断性考试数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 作双曲线 C 的一条弦 AB ，且 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \mathbf{0}$ ，若以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

2. 把满足条件 (1) $\forall x \in R, f(-x) = f(x)$ ，(2) $\forall x_1 \in R, \exists x_2 \in R$ ，使得 $f(x_1) = -f(x_2)$ 的函数称为“D 函数”，下列函数是“D 函数”的个数为（ ）

- ① $y = x^2 + |x|$ ② $y = x^3$ ③ $y = e^x + e^{-x}$ ④ $y = \cos x$ ⑤ $y = x \sin x$

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3. 已知命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$ ，则 $\neg P$ 为（ ）

- A. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 \geq 1$ B. $\forall x \in R, \sin x \geq 1$
C. $\exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1$ D. $\forall x \in R, \sin x > 1$

4. 命题“ $\forall x > 0, x(x+1) > (x-1)^2$ ”的否定为（ ）

- A. $\forall x > 0, x(x+1) > (x-1)^2$ B. $\forall x, 0, x(x+1) > (x-1)^2$
C. $\exists x > 0, x(x+1) \leq (x-1)^2$ D. $\exists x, 0, x(x+1) > (x-1)^2$

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2 = -5$ ， $S_4 = -16$ ，则 $a_6 =$ （ ）

- A. 5 B. 3 C. -12 D. -13

6. 很多关于整数规律的猜想都通俗易懂，吸引了大量的数学家和数学爱好者，有些猜想已经被数学家证明，如“费马大定理”，但大多猜想还未被证明，如“哥德巴赫猜想”、“角谷猜想”。“角谷猜想”的内容是：对于每一个正整数，如果它是奇数，则将它乘以 3 再加 1；如果它是偶数，则将它除以 2；如此循环，最终都能够得到 1. 下图为研究“角谷猜想”的一个程序框图. 若输入 n 的值为 10，则输出 i 的值为（ ）

10. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (-3, t)$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 5

11. 已知锐角 α 满足 $2\sin 2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4

12. 双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线与圆 $(x-3)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, 则 r 等于()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2
C. 3 D. 6

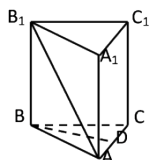
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若复数 Z 满足 $(1-2i)Z = -\frac{1}{2}(2+i)$, 其中 i 为虚数单位, 则 Z 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为_____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y-2 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - 2y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

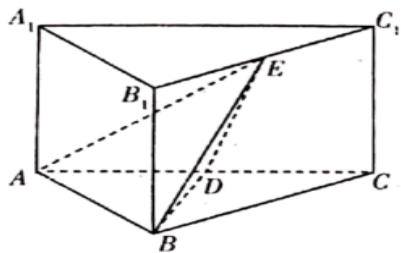
15. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 已知 $BC = CD = BD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AD = 6$, 且平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为_____.

16. 如图所示, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 AC 的中点, $AA_1 : AB = \sqrt{2} : 1$, 则异面直线 AB_1 与 BD 所成的角为_____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AA_1 = 1, AC = \sqrt{3}$, 点 D, E 分别为 AC 和 B_1C_1 的中点.



(I) 棱 AA_1 上是否存在点 P 使得平面 $PBD \perp$ 平面 ABE ? 若存在, 写出 PA 的长并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由.

(II) 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

18. (12 分) 已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0,1)$ 、 $B(0,-1)$ ，焦距为 $2\sqrt{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 已知直线 $y=m$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 M 、 N ，设 D 为直线 AN 上一点，且直线 BD 、 BM 的斜率的积为 $-\frac{1}{4}$. 证明：点 D 在 x 轴上.

19. (12 分) 已知函数 $f(x)=1+2x-\frac{2a}{x}-6a\ln x$ 存在一个极大值点和一个极小值点.

- (1) 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若函数 $f(x)$ 的极大值点和极小值点分别为 x_1 和 x_2 ，且 $f(x_1)+f(x_2)<2-6e$ ，求实数 a 的取值范围. (e 是自然对数的底数)

20. (12 分) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F_1 ，过点 F_1 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\sqrt{2}$ ，且 F_1 与短轴两端点的连线相互垂直.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 上存在两点 M ， N ，椭圆 C 上存在两个点 P,Q 满足： M,N,F_1 三点共线， P,Q,F_1 三点共线，且 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ ，求四边形 $PMQN$ 面积的取值范围.

21. (12 分) 在世界读书日期间，某地区调查组对居民阅读情况进行了调查，获得了一个容量为 200 的样本，其中城镇居民 140 人，农村居民 60 人.在这些居民中，经常阅读的城镇居民有 100 人，农村居民有 30 人.

- (1) 填写下面列联表，并判断能否有 99% 的把握认为经常阅读与居民居住地有关？

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	
不经常阅读			
合计			200

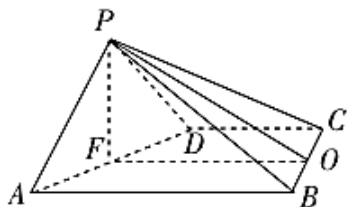
- (2) 从该地区城镇居民中，随机抽取 5 位居民参加一次阅读交流活动，记这 5 位居民中经常阅读的人数为 X ，若用样本的频率作为概率，求随机变量 X 的期望.

附： $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
------------------	------	------	-------	-------	-------	-------

k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

22. (10 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \perp BC$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $BC = CD = 2$, $PA = PD$, 点 F 、 O 分别为 AD , BC 的中点, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 求证: $BC \perp$ 平面 POF .

(2) 若 $PF = \sqrt{3}$, 求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$ 得 F 是弦 AB 的中点. 进而得 AB 垂直于 x 轴, 得 $\frac{b^2}{a} = a + c$, 再结合 a, b, c 关系求解即可

【详解】

因为 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$, 所以 F 是弦 AB 的中点. 且 AB 垂直于 x 轴. 因为以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点, 所以

$$\frac{b^2}{a} = a + c, \text{ 即 } \frac{c^2 - a^2}{a} = a + c, \text{ 则 } c - a = a, \text{ 故 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

故选: C

【点睛】

本题是对双曲线的渐近线以及离心率的综合考查, 是考查基本知识, 属于基础题.

2、B

【解析】

满足 (1) (2) 的函数是偶函数且值域关于原点对称, 分别对所给函数进行验证.

【详解】

满足 (1) (2) 的函数是偶函数且值域关于原点对称, ①不满足 (2); ②不满足 (1);

③不满足 (2); ④⑤均满足 (1) (2).

故选: B.

【点睛】

本题考查新定义函数的问题, 涉及到函数的性质, 考查学生逻辑推理与分析能力, 是一道容易题.

3、C

【解析】

根据全称量词命题的否定是存在量词命题, 即得答案.

【详解】

Q 全称量词命题的否定是存在量词命题, 且命题 $P: \forall x \in R, \sin x \leq 1$,

$$\therefore \neg p: \exists x_0 \in R, \sin x_0 > 1.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定, 属于基础题.

4、C

【解析】

套用命题的否定形式即可.

【详解】

命题“ $\forall x \in M, p(x)$ ”的否定为“ $\exists x \in M, \neg p(x)$ ”, 所以命题“ $\forall x > 0, x(x+1) > (x-1)^2$ ”的否定为

$$“\exists x > 0, x(x+1) \leq (x-1)^2”.$$

故选: C

【点睛】

本题考查全称命题的否定, 属于基础题.

5、B

【解析】

由题得 $a_1 + d = -5$, $4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16$, 解得 $a_1 = -7$, $d = 2$, 计算可得 a_6 .

【详解】

$$Q a_2 = -5, S_4 = -16, \therefore a_1 + d = -5, 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = -16, \text{解得 } a_1 = -7, d = 2,$$

$$\therefore a_6 = a_1 + 5d = 3.$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了等差数列的通项公式，前 n 项和公式，考查了学生运算求解能力.

6、B

【解析】

根据程序框图列举出程序的每一步，即可得出输出结果.

【详解】

$$\text{输入 } n=10, n=1 \text{ 不成立, } n \text{ 是偶数成立, 则 } n=\frac{10}{2}=5, i=0+1=1;$$

$$n=1 \text{ 不成立, } n \text{ 是偶数不成立, 则 } n=3 \times 5 + 1 = 16, i=1+1=2;$$

$$n=1 \text{ 不成立, } n \text{ 是偶数成立, 则 } n=\frac{16}{2}=8, i=2+1=3;$$

$$n=1 \text{ 不成立, } n \text{ 是偶数成立, 则 } n=\frac{8}{2}=4, i=3+1=4;$$

$$n=1 \text{ 不成立, } n \text{ 是偶数成立, 则 } n=\frac{4}{2}=2, i=4+1=5;$$

$$n=1 \text{ 不成立, } n \text{ 是偶数成立, 则 } n=\frac{2}{2}=1, i=5+1=6;$$

$n=1$ 成立，跳出循环，输出 i 的值为 6.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，考查计算能力，属于基础题.

7、C

【解析】

根据等比数列的性质以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

$$\text{解: 若 } \{a_n\} \text{ 是等比数列, 则 } S_9 - S_8 = a_9 = a_1 q^8, q \neq 0,$$

$$\text{若 } a_1 > 0, \text{ 则 } S_9 - S_8 = a_9 = a_1 q^8 > 0, \text{ 即 } S_9 > S_8 \text{ 成立,}$$

$$\text{若 } S_9 > S_8 \text{ 成立, 则 } S_9 - S_8 = a_9 = a_1 q^8 > 0, \text{ 即 } a_1 > 0,$$

故“ $a_1 > 0$ ”是“ $S_9 > S_8$ ”

”的充要条件,

故选: C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断, 利用等比数列的通项公式是解决本题的关键.

8、 B

【解析】

利用均值不等式可得 $V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2$, 即可求得 AB , 进而求得外接球的半径, 即可求解.

【详解】

由题意易得 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

$$\text{所以 } V_{B-ACC_1A_1} = \frac{1}{3} BC \cdot AC \cdot AA_1 = \frac{2}{3} BC \cdot AC \leq \frac{1}{3} (BC^2 + AC^2) = \frac{1}{3} AB^2,$$

当且仅当 $AC = BC$ 时等号成立,

又阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$,

所以 $AB = 2$,

$$\text{所以 堑堵 } ABC-A_1B_1C_1 \text{ 的外接球的半径 } R = \sqrt{\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 外接球的体积 } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi,$$

故选: B

【点睛】

本题以中国传统文化为背景, 考查四棱锥的体积、直三棱柱的外接球的体积、基本不等式的应用, 体现了数学运算、直观想象等核心素养.

9、 C

【解析】

首先判断出 p 为假命题、 q 为真命题, 然后结合含有简单逻辑联结词命题的真假性, 判断出正确选项.

【详解】

根据线面平行的判定, 我们易得命题 p : 若直线 $a \parallel b$, 直线 $b \subset$ 平面 α , 则直线 $a \parallel$ 平面 α 或直线 a 在平面 α 内, 命题 p 为假命题;

根据线面垂直的定义, 我们易得命题 q : 若直线 $l \perp$ 平面 α , 则若直线 l 与平面 α 内的任意直线都垂直, 命题 q 为真命题.

故:A 命题“ $p \wedge q$ ”为假命题; B 命题“ $p \vee (\neg q)$ ”为假命题; C 命题“ $(\neg p) \wedge q$ ”为真命题; D 命题“ $p \wedge (\neg q)$ ”为假命题.

故选: C.

【点睛】

本小题主要考查线面平行与垂直有关命题真假性的判断, 考查含有简单逻辑联结词的命题的真假性判断, 属于基础题.

10、B

【解析】

先求出 $\vec{a} + \vec{b}$, 再利用 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ 求出 t , 再求 $|\vec{b}|$.

【详解】

解: $\vec{a} + \vec{b} = (1, -2) + (-3, t) = (-2, t - 2)$

由 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 所以 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$

$$1 \times (-2) + (-2) \times (t - 2) = 0,$$

$$t = 1, \vec{b} = (-3, 1), |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

故选: B

【点睛】

考查向量的数量积及向量模的运算, 是基础题.

11、C

【解析】

利用 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ 代入计算即可.

【详解】

由已知, $4 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha$, 因 α 为锐角, 所以 $\sin \alpha \neq 0$, $2 \cos \alpha = \sin \alpha$,

即 $\tan \alpha = 2$.

故选: C.

【点睛】

本题考查二倍角的正弦、余弦公式的应用, 考查学生的运算能力, 是一道基础题.

12、A

【解析】

由圆心到渐近线的距离等于半径列方程求解即可.

【详解】

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ，圆心坐标为 $(3,0)$ 。由题意知，圆心到渐近线的距离等于圆的半径 r ，即 $r =$

$$\frac{\left| \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 - 0 \right|}{\sqrt{\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 1}} = \sqrt{3}$$

答案：A

【点睛】

本题考查了双曲线的渐近线方程及直线与圆的位置关系，属于基础题。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

【解析】

把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简，求出 $\bar{z}$ 得答案。

【详解】

$$Q(1-2i)z = -\frac{1}{2}(2+i) = -1 - \frac{1}{2}i, \therefore z = \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{1-2i} = \frac{\left(-1 - \frac{1}{2}i\right)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{1}{2}i,$$

$$\text{则 } \bar{z} = \frac{1}{2}i, \therefore z \text{ 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为 } \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{故答案为 } \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的代数表示法及其几何意义准确计算是关键，是基础题。

14、0 6

【解析】

作不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，即可求出结果。

【详解】

作出可行域，如图中的阴影部分：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/855114023321012000>