第 04 讲 解题技巧专题：勾股定理与面积问题、方程思想

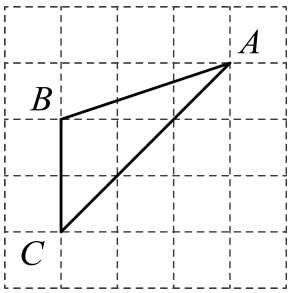
模块一 思维导图串题型



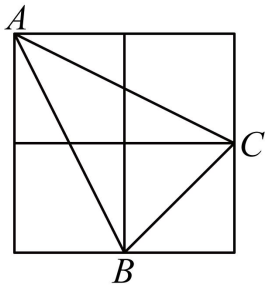
模块二 题型归纳举一反三

【题型一 三角形中利用面积求斜边上的高】

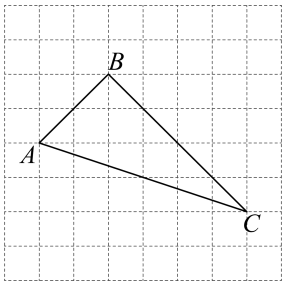
例 1．（2023 上·江苏南通·八年级校考阶段练习）如图，$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 在边长为 1 的正方形网格的格点上，则 AC 边上的高是_____.



【变式 1-1】（2023 上·广东深圳·八年级深圳实验学校校考期中）如图，由四个边长为1的小正方形构成一个大正方形，连接小正方形的三个顶点，可得到 $\triangle ABC$，则 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高是_____.



【变式 1-2】（2023 上·吉林长春·八年级校考期中）如图，5×5 网格中每个小正方形的边长都为1，$\triangle ABC$ 的顶点均为网格上的格点．



(1) $AB=$_____， $BC=$_____， $AC=$_____；

(2) $\triangle ABC$ 的形状为_____三角形；

(3)求 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的高_____.

【变式 1-3】（2023 上·江苏盐城·八年级统考期中）我们规定：三角形任意一条边的“边高差”等于这条边与这条边上高的长度之差. 如图 1，$\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上高，边 BC 的“边高差”等于 $BC-AD$，记为 $h(BC)$.

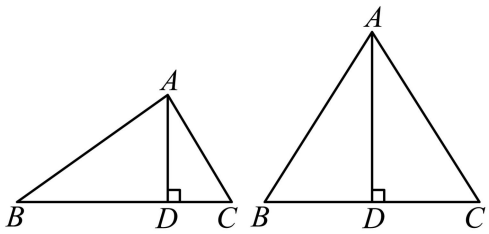


图1　　图2

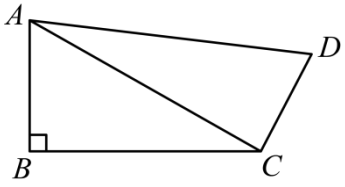
(1)如图 2，若 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，$AD=5$，$BD=3$，则 $h(BC)=$_____.

(2)若 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$=90°，$AB=5$，$BC=12$，则 $h(AC)=$_____；

(3)若 $\triangle ABC$ 中，$AB=25$，$AC=17$，BC 边上的高为 15，求 $h(BC)$ 的值.

【题型二 几何图形中巧妙割补求面积】

例 2.如图，在四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle B$=90°，$\angle ACB=30°$，$AB=6$，$AD=13$，$CD=5$.



(1)求证：$\triangle ACD$ 是直角三角形；

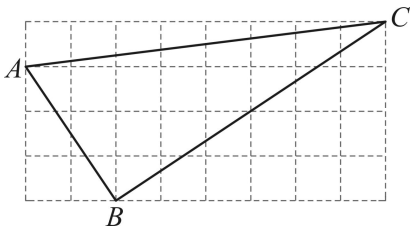
(2)求四边形 $ABCD$ 的面积.

【变式 2-1】已知 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且 $a=2\sqrt{3}$，$b=3\sqrt{6}$，$c=\sqrt{66}$.

(1)试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

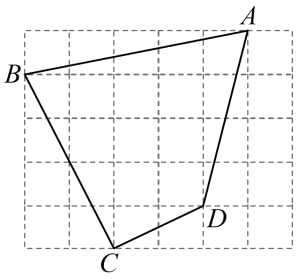
【变式 2-2】如图，正方形网格的每个小方格边长均为 1，$\triangle ABC$ 的顶点在格点上.



(1)直接写出三角形的周长_____，面积_____.

(2)直接写出 AC 边上的高=_____.

【变式 2-3】计算：如图，每个小正方形的边长都为 1.



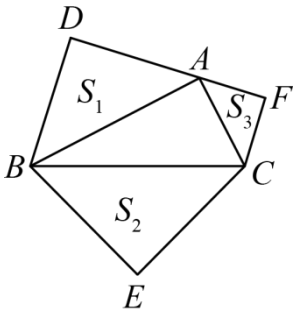
(1)求线段 CD 与 BC 的长；

(2)求四边形 $ABCD$ 的面积；

(3)求证：$\angle BCD=90°$.

【题型三 “勾股树”及其拓展类型求面积】

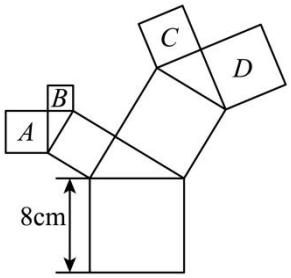
例 3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，分别以 Rt△ABC 的三条边分别作等腰直角三角 △ABD，$\triangle BCE$，△ACF，若它们的面积分别表示为 S_1，S_2，S_3，则 S_1，S_2，S_3 的关系是（　）



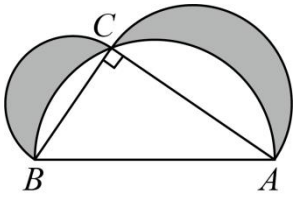
A．$S_1+S_2=S_3$　　B．$S_1+S_3=S_2$

C．$S_1=S_2=S_3$　　D．S_1，S_2，S_3无等量关系

【变式 3-1】如图，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为8cm，正方形 A 的面积是$8cm^2$，B 的面积是$14cm^2$，C 的面积是$18cm^2$，则 D 的面积为_____ cm^2．



【变式 3-2】如图，在Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，分别以各边为直径作半圆，图中阴影部分在数学史上称为“希波克拉底月牙”，若 $BC=3$，$AC=4$，则图中阴影部分的面积为_____.



【变式 3-3】勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．

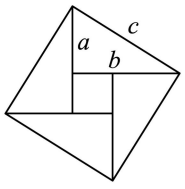


图1

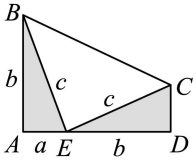


图2

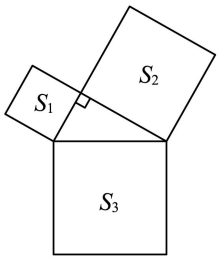


图3

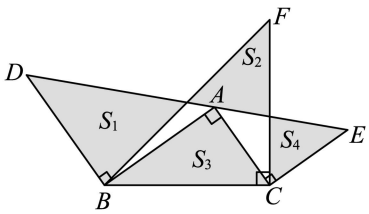


图4

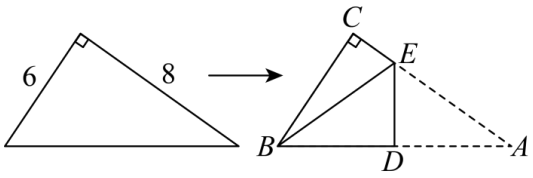
(1)将两个全等的直角三角形按如图所示方式摆放，使点 A、E、D 在同一条直线上，请利用图 2 证明勾股定理．

(2)探究发现：如图 3 以直角三角形的三边为边，向外部作正方形面积分别为S_1，S_2，S_3，请猜想S_1，S_2，S_3的等量关系，并证明你的结论．

(3)拓展应用：如图，Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，分别以$\triangle ABC$的三条边为直角边作三个等腰直角三角形：△ABD、△ACE、△BCF，若图中阴影部分的面积$S_1=7.5$，$S_2=3.5$，$S_3=5.5$，则S_4_.

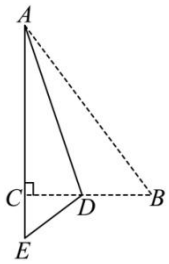
【题型四 几何图形中的方程思想—折叠问题（利用等边建立方程）】

例 4. 已知直角三角形纸片ABC的两直角边长分别为 6，8，现将$\triangle ABC$按如图所示的方式折叠，使点A与点B重合，则CE的长是（　）



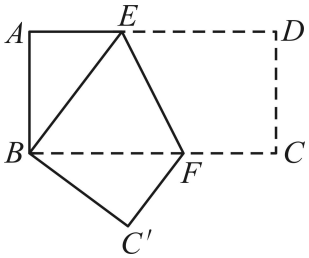
A．$\frac{5}{4}$　　B．$\frac{7}{4}$　　C．$\frac{15}{4}$　　D．$\frac{25}{4}$

【变式 4-1】如图，有一块直角三角形纸片，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，将斜边AB翻折，使点B落在直角边AC的延长线上的点E处，折痕为AD，则BD的长为（　）



A．$\frac{3}{4}$　　B．1.5　　C．$\frac{5}{3}$　　D．3

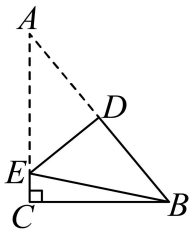
【变式 4-2】如图，将长方形纸片$ABCD$折叠，使点D与点B重合，点C落在点C'处，折痕为EF.



(1)求证：$BE=BF$.

(2)若$AB=4$，$AD=8$，求△BEF的面积.

【变式 4-3】如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，把$\triangle ABC$沿直线DE折叠，点A与点B重合.



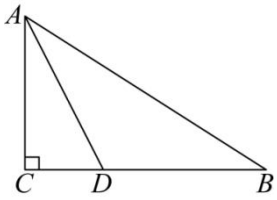
(1)若 $\angle EBC=16°$，则 $\angle A$ 的度数为 _ ；

(2)若 $AD=5$， $BC=6$，求 CE 的长；

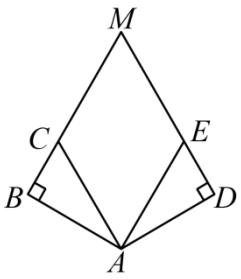
(3)当 $\triangle BCE$ 的周长为 $m(m>0)$， $AB=n(n>0)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.(用含 m 、 n 的代数式表示)

【题型五 几何图形中的方程思想—公边问题（利用公边建立方程）】

例 5. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$CD=3$，$BD=5$，则 $AC=$____.



【变式 5-1】如图，在 Rt△ABC 和 Rt△ADE 中，$\angle B=\angle D=90°$， $AC=AE$， $BC=DE$，延长 BC， DE 交于点 M .



(1)求证：点 A 在 $\angle M$ 的平分线上；

(2)若 $AC\parallel DM$， $AB=12$， $BM=18$，求 BC 的长.

【变式 5-2】（23-24 八年级上·江苏南京·阶段练习）已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=5$， $BC=8$，点 D 在 BC 边上．请从 A ， B 两题中任选一题作答.

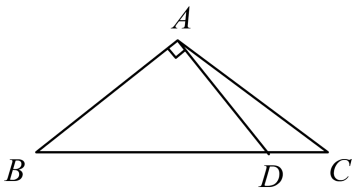


图1

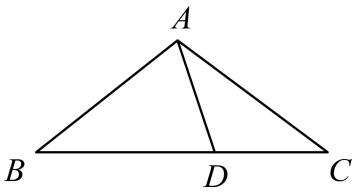


图2

A．如图 1，若 $AD \perp AB$；

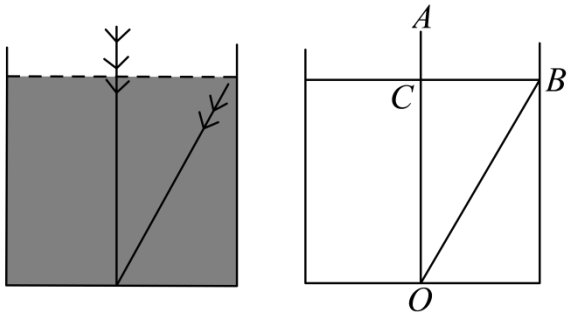
B．如图 2，若 $BD = AB$；

我选择 A 题，则 AD 的长为 _____；

我选择 B 题，则 AD 的长为_____.

【题型六 实际问题中的方程思想】

例 6.（2023 上·河南郑州·八年级校考期中）如图，有一个水池，水面是一个边长为 16 米的正方形，在水池正中央有一根芦苇，它高出水面 2 米，如果把这根芦苇拉向水池一边的中点，它的顶端恰好到达池边的水面，则水池里水的深度与这根芦苇的长度分别是多少米？



【变式 6-1】如图 1、2（图 2 为图 1 的平面示意图），推开双门，双门间隙 CD 的距离为 2 寸，点 C 和点 D 距离门槛 AB 都为 1 尺（1 尺＝10 寸），则 AB 的长是（　　）

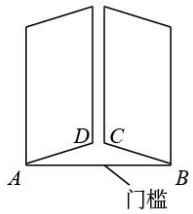


图1

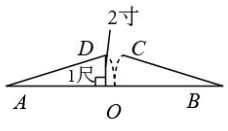
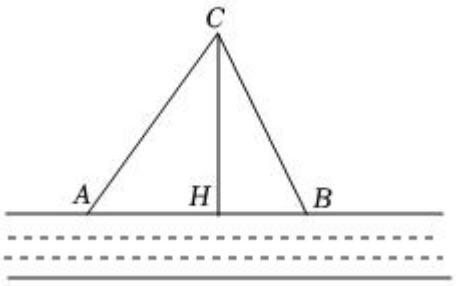


图2

A．50.5 寸　　B．52 寸　　C．101 寸　　D．104 寸

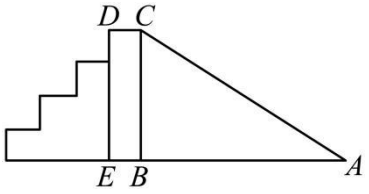
【变式 6-2】在一条东西走向的河的一侧有一村庄 C，河边原有两个取水点 A，B，其中 $AB=AC$，由于某种原由 C 到 A 的路现在已经不通，某村为方便村民取水决定在河边新建一个取水点 H（A、H、B 在一条直线上），并新修一条路 CH，测得 $CB=1.5$ 千米，$CH=1.2$ 千米，$HB=0.9$ 千米．



(1)问 CH 是否为从村庄 C 到河边的最近路？请通过计算加以说明．

(2)求原来的路线 AC 的长．

【变式 6-3】大丰施耐庵公园是许多青少年喜爱的场所．如图是公园内一个滑梯的示意图，左边是楼梯，中间是过道，右边是滑道，已知滑道 AC 与 AE 的长度一样，滑梯的高度 $BC=3m$，$BE=1m$．



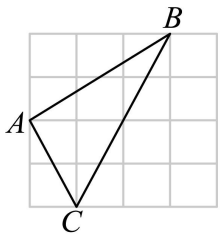
(1)要想求 AC 的长度，我们可以设 AC 为 xm，则 $AB=$_____；

(2)请求出滑梯 AC 的长度．

模块三 小试牛刀过关测

一、单选题

1．（2024·陕西商洛·二模）如图，$\triangle ABC$的顶点A，B，C均在边长为1的正方形网格的格点上，则AC边上的高为（　）



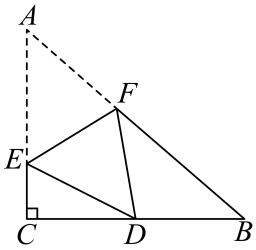
A．$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　B．$\frac{8\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{8}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

2．（2024·江苏镇江·二模）《九章算术》内容丰富，与实际生活联系紧密，在书上讲述了这样一个问题“今有垣高一丈．倚木于垣，上与垣齐．引木却行一尺，其木至地．问木长几何？”其内容可以表述为：“有一面墙，高1丈．将一根木杆斜靠在墙上，使木杆的上端与墙的上端对齐，下端落在地面上．如果使木杆下端从此时的位置向远离墙的方向移动1尺，则木杆上端恰好沿着墙滑落到地面上．问木杆长多少尺？”（说明：1丈＝10尺）设木杆长x尺，依题意，下列方程正确的是（　）

A．$(x+1)^2=x^2+10^2$　　B．$10^2+(x-1)^2=x^2$

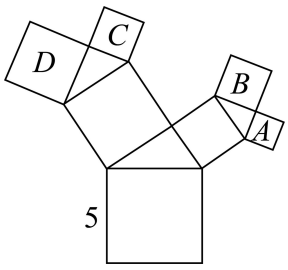
C．$x^2=(x-1)^2+1^2$　　D．$(x+1)^2=x^2+1^2$

3．（23-24八年级下·广东中山·期中）如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，将它的锐角A翻折，使得点A落在边BC的中点D处，折痕交AC边于点E，交AB边于点F，则DE的长为（　）



A．3　　B．4　　C．$\frac{14}{3}$　　D．$\frac{13}{3}$

4．（23-24八年级下·四川泸州·期中）如图，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为5，则正方形A，B，C，D的面积的和为（　）



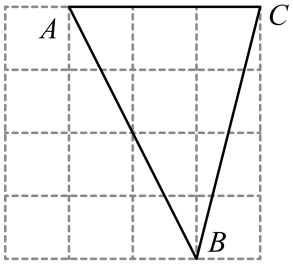
A．4　　B．5　　C．10　　D．25

二、填空题

5．（23-24 八年级下·江西宜春·阶段练习）在《九章算术》中有一个问题（如图）：今有竹高一丈，末折抵地，去本四尺，问折者高几何?它的意思是：一根竹子原高一丈（10 尺），中部一处折断，竹梢触地面处离竹根 4 尺，试问折断处离地面_____尺．



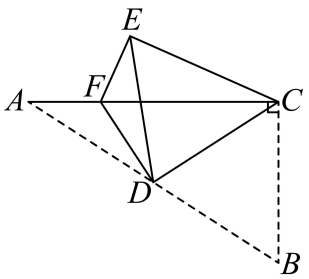
6．（23-24 八年级下·河北邢台·阶段练习）如图，在网格图中，小正方形的边长均为 1，点 A，B，C 均在小正方形的顶点上．



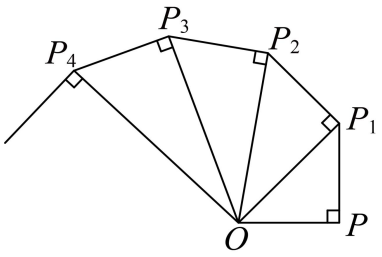
（1）BC 的长为_____．

（2）在 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高为_____．

7．（23-24 八年级下·广东广州·期中）如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC=6$，点 D 为斜边 AB 上的一点，连接 CD，将 $\triangle BCD$ 沿 CD 翻折，使点 B 落在点 E 处，点 F 为直角边 AC 上一点，连接 DF，将 $\triangle ADF$ 沿 DF 翻折，点 A 恰好与点 E 重合．若 $AD=5$，则 EF 的长为_____．

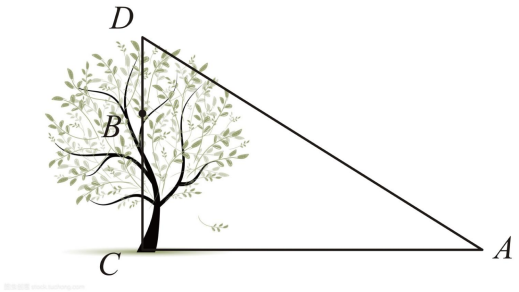


8.（23-24 八年级下·山东菏泽·期中）如图，已知 $OP=1$，过点 P 作 $PP_1\perp OP$，且 $PP_1=1$；再过点 P_1 作 $P_1P_2\perp OP_1$；且 $P_1P_2=1$；又过点 P_2 作 $P_2P_3\perp OP_2$ 且 $P_2P_3=1$；又过点 P_3 作 $P_3P_4\perp OP_3$ 且 $P_3P_4=1$；……，按照这种方法依次作下去得到一组直角三角形 $\mathrm{Rt}\triangle OPP_1$，$\mathrm{Rt}\triangle OP_1P_2$，$\mathrm{Rt}\triangle OP_2P_3$，$\mathrm{Rt}\triangle OP_3P_4$，……，它们的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，……，那么 $S_{2023}=$_____．



三、解答题

9．（23-24 八年级下·山东济宁·阶段练习）如图，有两只猴子在一棵树 CD 高 5m 的点 B 处，它们都要到 A 处的池塘去喝水，其中一只猴子沿树爬下走到离树 10m 处的池塘 A 处，另一只猴子爬到树顶 D 后直线跃向池塘的 A 处，如果两只猴子所经过的路程相等，这棵树高有多少米？树顶 D 到池塘 A 的距离有多少米？



10．（23-24 八年级下·江西南昌·期中）如图是一张直角三角形 ABC 纸片，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$．

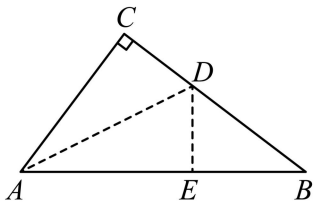


图1

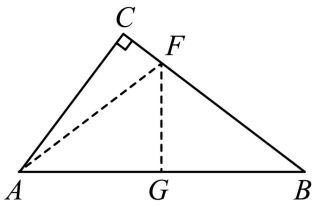


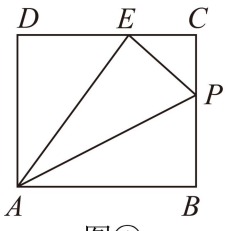
图2

(1)在图 1 中，将直角边 AC 沿 AD 折叠，使点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处，求 CD 的长；

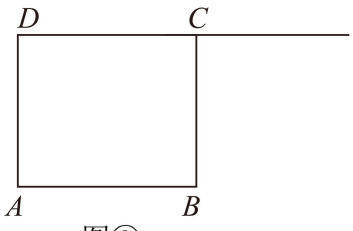
(2)在图 2 中，将 $\triangle BFG$ 沿 FG 折叠，使点 B 与点 A 重合，求 BF 的长．

11．（23-24 八年级下·山东淄博·期中）在四边形 $ABCD$ 中，

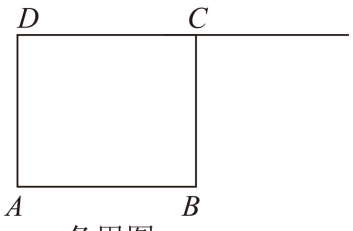
$\angle DAB=\angle B=\angle C=\angle D=90°, AB=CD=10, BC=AD=8$．



图①



图②



备用图

(1)若 P 为边 BC 上一点，如图①将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 翻折至 $\triangle AEP$ 的位置，当点 B 落在 CD 边上点 E 处时，求 PB 的长；

(2)如图②，点 Q 为射线 DC 上的一个动点，将 $\triangle ADQ$ 沿 AQ 翻折，点 D 恰好落在直线 BQ 上的点 D' 处，求 DQ 的长.

12．（23-24 八年级下·北京海淀·期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中，AB，AC 三边的长分别为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{17}$，求这个三角形的面积．小辉同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点 $\triangle ABC$（即 $\triangle ABC$ 的三个顶点都在小正方形的顶点处），如图①所示．这样不需求 $\triangle ABC$ 的高，而借用网格就能计算出它的面积．

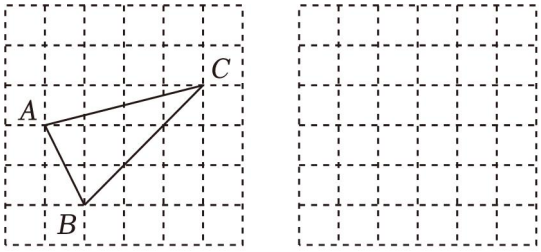


图1　　图2

(1)请你将 $\triangle ABC$ 的面积直接填写在横线上：_____；

(2)思维拓展：我们把上述求 $\triangle ABC$ 面积的方法叫做构图法．若 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 $2\sqrt{2}a$，$\sqrt{10}a$，$\sqrt{26}a(a>0)$，请利用图②的正方形网格（每个小正方形的边长为 a）画出相应的 $\triangle ABC$；并求出它的面积_____.

(3)探索创新：若 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 $\sqrt{m^2+16n^2}$，$\sqrt{9m^2+4n^2}$，$2\sqrt{m^2+n^2}(m>0$，$n>0$，且 $m\neq n$）请用以上方法求 $\triangle ABC$ 的面积．

13．（23-24 八年级上·山西太原·期中）请阅读下面文字并完成相关任务．

勾股定理，是几何学中一颗光彩夺目的明珠，被称为“几何学的基石”．在我国最早对勾股定理进行证明的是三国时期吴国的数学家赵爽．

(1)如图 1 是著名的赵爽弦图，由四个全等的直角三角形拼成，用它可以验证勾股定理，思路是：大正方形的面积有两种求法，一种是等于 c^2，另一种是等于四个直角三角形与一个小正方形的面积之和，即

$\frac{1}{2}ab\times4+(b-a)^2$，从而得到等式$c^2=\frac{1}{2}ab\times4+(b-a)^2$，化简便得结论$a^2+b^2=c^2$．这里用两种求法来表示同一个量从而得到等式或方程的方法，我们称之为“双求法”．现在，请你用“双求法”解决下面问题：

如图 2，在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高，$AB=4$，$AC=5$，$BC=6$，设$BD=x$，求x的值．

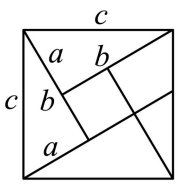


图1

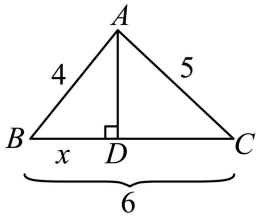
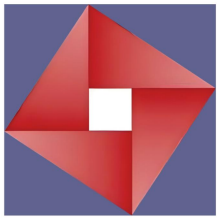


图2

(2)2002 年在北京召开的国际数学家大会会标和 2021 年在上海召开的国际数学教育大会会标，都包含了赵爽的弦图．



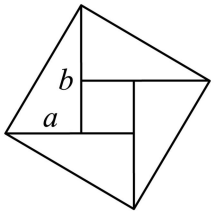




图3

如图 3，如果大正方形的面积为 18，直角三角形中较短直角边长为a，较长直角边长为b，且$a^2+b^2=ab+10$，那么小正方形的面积为_____．

(3)勾股定理本身及其验证和应用过程都体现了一种重要的数学思想是_____．

A．函数思想　B．整体思想　C．分类讨论思想　D．数形结合思想

14．（23-24 八年级上·山西运城·期中）综合与实践

勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今．如图 2，直角三角形的两条直角边分别为 a，b，斜边为 c．

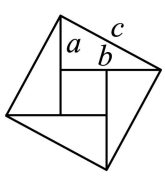


图1

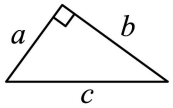


图2

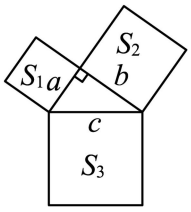


图3

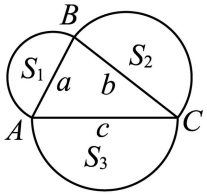


图4

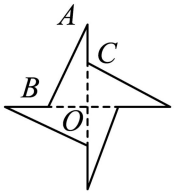


图5

(1)如图 3，以直角三角形的三边 a，b，c 为边，分别向外部作正方形，直接写出S_1，S_2，S_3满足的关系：_.

(2)如图 4，以 Rt△ABC 的三边为直径，分别向外部作半圆，请判断 S_1，S_2，S_3 的关系并证明．

(3)如图 5，将这四个直角三角形紧密地拼接，形成飞镖状，已知外围轮廓（实线）的周长为 80，$OC=5$，直接写出该飞镖状图案的面积．

第 04 讲 解题技巧专题：勾股定理与面积问题、方程思想

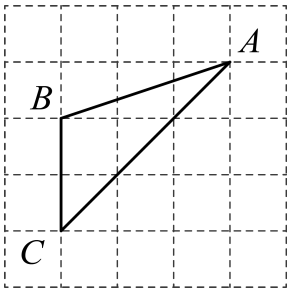
模块一 思维导图串题型



模块二 题型归纳举一反三

【题型一 三角形中利用面积求斜边上的高】

例 1．（2023 上·江苏南通·八年级校考阶段练习）如图，$\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 在边长为 1 的正方形网格的格点上，则 AC 边上的高是_____.



【答案】$\sqrt{2}$

【分析】本题考查勾股定理，三角形的面积计算．利用等积法求解是解题关键．由图可知 $BC=2$，且其边上的高为 3，即可求出 $S_{\triangle ABC}=3$．由勾股定理可求出 $AC=3\sqrt{2}$，设 AC 边上的高为 x，结合三角形面积公式可列出关于 x 的方程，解出 x 的值即可．

【详解】解：由图可知 $BC=2$，且其边上的高为 3，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$．

由图可知 $AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

设 AC 边上的高为 x，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}x$，

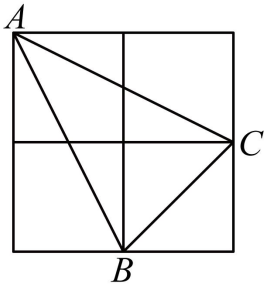
$\therefore \frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}x=3$，

解得：$x=\sqrt{2}$，

$\therefore AC$ 边上的高是 $\sqrt{2}$．

故答案为：$\sqrt{2}$．

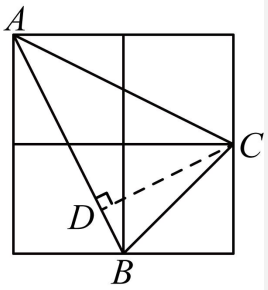
【变式 1-1】（2023 上·广东深圳·八年级深圳实验学校校考期中）如图，由四个边长为1的小正方形构成一个大正方形，连接小正方形的三个顶点，可得到 $\triangle ABC$，则 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高是_____．



【答案】$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【分析】作 $CD\perp AB$ 于 D，根据勾股定理求出 AB 的长，再利用三角形的面积求出三角形的高 CD 即可．

【详解】作 $CD\perp AB$ 于 D，如图所示：



∵小正方形的边长为1，

$\therefore AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\because S_{\triangle ABC}=2\times 2-\frac{1}{2}\times 1\times 1-\frac{1}{2}\times 2\times 1-\frac{1}{2}\times 2\times 1=1.5$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times CD=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times CD=1.5$，

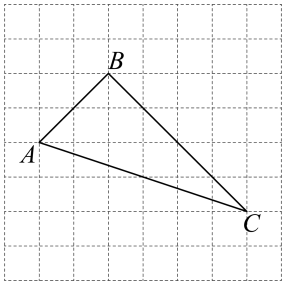
解得：$CD=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

故答案为：$\frac{3\sqrt{5}}{5}$．

【点睛】此题考查了勾股定理以及三角形的面积，根据题意得出 $\triangle ABC$ 的面积等于正方形面积减去其他3个

三角形的面积是解题的关键.

【变式 1-2】（2023 上·吉林长春·八年级校考期中）如图，5×5 网格中每个小正方形的边长都为1，$\triangle ABC$ 的顶点均为网格上的格点.



(1) $AB=$_____，$BC=$_____，$AC=$_____；

(2) $\triangle ABC$ 的形状为_____三角形；

(3)求 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的高_____.

【答案】(1) $2\sqrt{2}$，$4\sqrt{2}$，$2\sqrt{10}$

(2)直角

(3) $\frac{4}{5}\sqrt{10}$

【分析】（1）本题主要考查网格中的勾股定理，直接计算即可求解.

（2）主要考查勾股定理逆定理判定三角形的形状，直接把三边长度分别平方，可以发现 $AB^2+BC^2=AC^2$ 即可判定三角形的形状.

（3）考查利用等面积法求斜边上的高，直接计算就可以求解.

【详解】（1）由题可知，$AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$；

$BC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$；

$AC=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$.

（2）解：$\because AB^2=8$，$BC^2=32$，$AC^2=(2\sqrt{10})^2=40$；

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$；

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

（3）如下图，过点 B 作 AC 的垂线，垂足为 D；

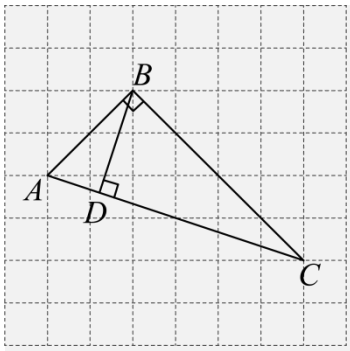
$\therefore BD\perp AC$；

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形；

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BD$；

$\therefore BD=\frac{2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}$；

$\therefore BD=\frac{4}{5}\sqrt{10}$.



【变式 1-3】（2023 上·江苏盐城·八年级统考期中）我们规定：三角形任意一条边的“边高差”等于这条边与这条边上高的长度之差. 如图 1，$\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上高，边 BC 的“边高差”等于 $BC-AD$，记为 $h(BC)$.

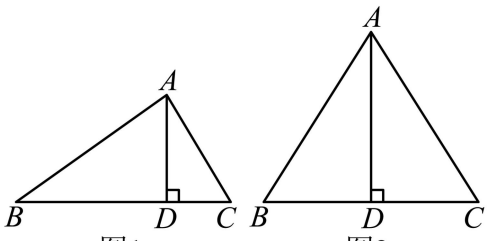


图1　　图2

(1)如图 2，若 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，$AD=5$，$BD=3$，则 $h(BC)=$_____.

(2)若 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$=90°，$AB=5$，$BC=12$，则 $h(AC)=$_____；

(3)若 $\triangle ABC$ 中，$AB=25$，$AC=17$，BC 边上的高为 15，求 $h(BC)$ 的值.

【答案】(1)1

(2)$\frac{109}{13}$

(3)13 或 −3

【分析】本题主要考查了等腰三角形的性质，勾股定理，三角形面积的计算；

（1）根据等腰三角形的性质得出 $BD=DC=3$，求出 $BC=6$，即可求出结果；

（2）作 $BH\perp AC$ 于 H，根据勾股定理求出 $AC=13$，根据三角形面积得出 $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$，求出 $BH=\frac{60}{13}$，即可求出结果；

（3）分两种情况画出图形，求出结果即可.

解题的关键是熟练掌握勾股定理，在一个直角三角形中，两条直角边分别为 a、b，斜边为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

【详解】（1）解：∵AB = AC，$\angle BAD=\angle CAD$，

∴ $BD=DC=3$，

∴ $BC=6$，

∴ $h(BC)=BC-AD=6-5=1$.

故答案为：1.

（2）解：如图 3 中，作 $BH\perp AC$ 于 H，

$\because \angle ABC=90°$，$AB=5$，$BC=12$，

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2=169$，

$\therefore AC=13$，

$\because \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$，

$\therefore BH=\frac{60}{13}$；

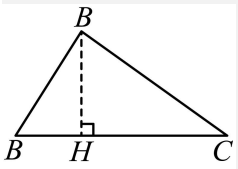


图3

$\therefore h(AC)=AC-BH=13-\frac{60}{13}=\frac{109}{13}$.

故答案为$\frac{109}{13}$.

（3）解：如图 4 所示，

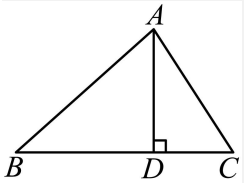


图4

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，在 Rt△$ABD$ 中，$AB=25$，$AD=15$，

根据勾股定理得：$BD^2=AB^2-AD^2=400$，

$\therefore BD=20$，

在 Rt△ADC 中，$AC=17$，$AD=15$，

根据勾股定理得：$DC^2=AC^2-AD^2=64$，

$\therefore DC=8$，

$\therefore BC=BD+DC=20+8=28$，

$\therefore h(BC)=BC-AD=28-15=13$；

如图 5 所示，

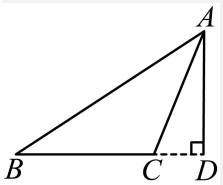


图5

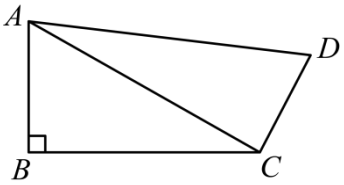
$BC=BD-DC=20-8=12$，

$\therefore h(BC)=BC-AD=12-15=-3$.

综上所述，$h(BC)$为 13 或-3.

【题型二 几何图形中巧妙割补求面积】

例 2.如图，在四边形$ABCD$中，已知$\angle B$=90°，$\angle ACB=30°$，$AB=6$，$AD=13$，$CD=5$.



(1)求证：$\triangle ACD$是直角三角形；

(2)求四边形$ABCD$的面积.

【答案】(1)见解析

(2)$18\sqrt{3}+30$

【分析】（1）根据30°角的直角三角形的性质得到$AC=2AB=12$，再根据跟勾股定理的逆定理即可得证；

（2）根据勾股定理得到$BC=6\sqrt{3}$，再利用三角形的面积公式即可得到结论.

【详解】（1）证明：∵$\angle B$=90°，$\angle ACB=30°$，$AB=6$，

∴$AC=2AB=12$，

在$\triangle ACD$中，$AC=12$，$AD=13$，$CD=5$，

∵$5^2+12^2=13^2$，即$AC^2+CD^2=AD^2$，

∴$\triangle ACD$是直角三角形；

（2）解：∵在$\triangle ABC$中，Ð$B=90°$，$AB=6$，$AC=12$，

∴$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$，

又∵$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}\times 5\times 12=30$，

∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=18\sqrt{3}+30$.

∴四边形$ABCD$为$18\sqrt{3}+30$.

【点睛】本题考查勾股定理，勾股定理的逆定理，30°角的直角三角形的性质，三角形的面积．熟练掌握勾股定理的逆定理是解题的关键.

【变式 2-1】已知a，b，c是$\triangle ABC$的三边，且$a=2\sqrt{3}$，$b=3\sqrt{6}$，$c=\sqrt{66}$.

(1)试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由；

(2)求$\triangle ABC$的面积.

【答案】(1) $\triangle ABC$ 是直角三角形，理由见解析

(2) $9\sqrt{2}$

【分析】（1）根据勾股定理的逆定理进行计算即可求解；

（2）根据三角形的面积公式进行计算即可求解.

【详解】（1）解： $\triangle ABC$ 是直角三角形．理由：

$\because a^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ ， $b^2=\left(3\sqrt{6}\right)^2=54$ ， $c^2=\left(\sqrt{66}\right)^2=66$ ，

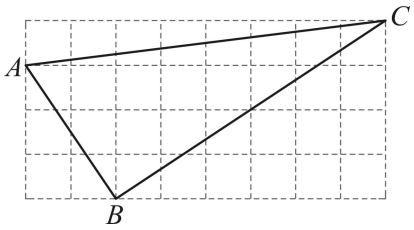
$\therefore a^2+b^2=c^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C$ 是直角；

（2）解： $\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3\sqrt{6}=9\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了勾股定理的逆定理，熟练掌握勾股定理的逆定理是解题的关键.

【变式 2-2】如图，正方形网格的每个小方格边长均为 1， $\triangle ABC$ 的顶点在格点上.



(1)直接写出三角形的周长_____，面积_____.

(2)直接写出 AC 边上的高=_____.

【答案】(1) $3\sqrt{13}+\sqrt{65}$ ， 13

(2) $\frac{2}{5}\sqrt{65}$

【分析】（1）利用勾股定理，进行计算即可解答；

（2）利用面积法，进行计算即可解答.

【详解】（1）由题意得：

$AB^2=2^2+3^2=13$ ，

$BC^2=4^2+6^2=52$ ，

$AC^2=8^2+1^2=65$ ，

$\therefore AB=\sqrt{13},BC=2\sqrt{13},AC=\sqrt{65}$ ；

故周长为： $\sqrt{13}+2\sqrt{13}+\sqrt{65}=3\sqrt{13}+\sqrt{65}$ ；

$\triangle ABC$ 的面积为： $4\times 8-\frac{1}{2}\times 1\times 8-\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}\times 4\times 6=13$ ，

故答案为： $3\sqrt{13}+\sqrt{65}$ ， 13；

（2）设 AC 边上的高为 h，

∵ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot h$

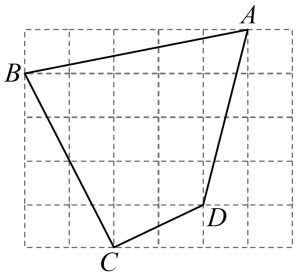
∴ $\frac{1}{2}\sqrt{65}h=13$，

∴ $h=\frac{26}{65}\sqrt{65}=\frac{2}{5}\sqrt{65}$，

故答案为：$\frac{2}{5}\sqrt{65}$.

【点睛】本题考查了勾股定理和面积法，熟练掌握利用面积法构造方程求出未知元素是解题的关键.

【变式 2-3】计算：如图，每个小正方形的边长都为 1.



(1)求线段 CD 与 BC 的长；

(2)求四边形 $ABCD$ 的面积；

(3)求证：$\angle BCD=90°$.

【答案】(1) $BC=2\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{5}$

(2) $\frac{29}{2}$

(3)见解析

【分析】（1）根据勾股定理解答即可；

（2）运用分割法解答即可；

（3）连接 BD，根据勾股定理的逆定理解答即可.

【详解】（1）∵每个小正方形的边长都为 1，

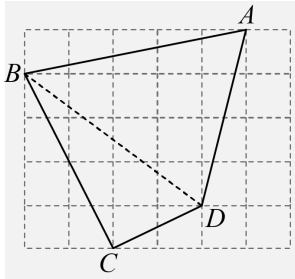
∴ $BC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

（2）$S_{四边形ABCD}=5\times5-\frac{1}{2}\times1\times5-\frac{1}{2}\times1\times4-1\times1-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times4$

$=25-\frac{5}{2}-2-1-1-4$

$=\frac{29}{2}$

（3）连接 BD，



$\therefore BD=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because BC^2+CD^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=25$，$BD^2=5^2=25$，

$\therefore BC^2+CD^2=BD^2$，

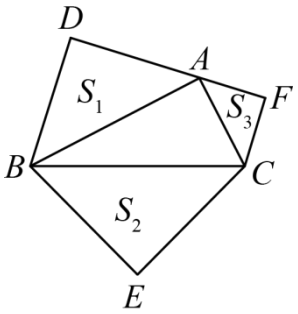
$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形，且 BD 为斜边，

$\therefore \angle BCD=90°$.

【点睛】此题考查勾股定理和勾股定理的逆定理，关键是根据勾股定理得出各边的长解答.

【题型三 “勾股树”及其拓展类型求面积】

例 3. 如图，在Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，分别以Rt$\triangle ABC$ 的三条边分别作等腰直角三角 $\triangle ABD$，$\triangle BCE$，$\triangle ACF$，若它们的面积分别表示为S_1，S_2，S_3，则S_1，S_2，S_3的关系是（　）



A．$S_1+S_2=S_3$　　B．$S_1+S_3=S_2$

C．$S_1=S_2=S_3$　　D．S_1，S_2，S_3无等量关系

【答案】B

【分析】根据勾股定理可得 $AC^2+AB^2=BC^2$，根据等腰三角形的性质和三角形的面积公式进行分析即可求解.

【详解】解：$\because$ Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，

故 $AC^2+AB^2=BC^2$；

$\because \triangle ABD$ 是等腰直角三角形，AB 是斜边，

$\therefore AD=BD$，

则 $AB^2=AD^2+BD^2=2AD^2$，

$\therefore AD^2=\frac{1}{2}AB^2$

故$S_1=\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{4}AB^2$，

同理，$S_2=\frac{1}{2}BE^2=\frac{1}{4}BC^2$，$S_3=\frac{1}{2}AF^2=\frac{1}{4}AC^2$，

$\because AC^2+AB^2=BC^2$，

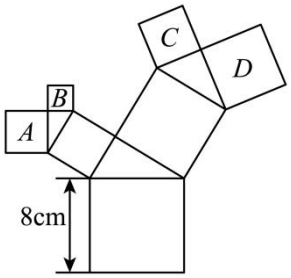
则$\frac{1}{4}AC^2+\frac{1}{4}AB^2=\frac{1}{4}BC^2$，

即$S_1+S_3=S_2$，

故选：B.

【点睛】本题考查了勾股定理，等腰三角形的性质，三角形的面积公式，熟练掌握勾股定理是解题的关键.

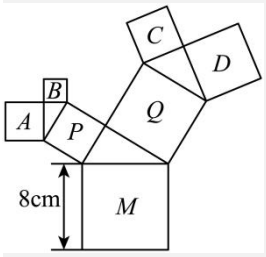
【变式 3-1】如图，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为8cm，正方形A的面积是8cm^2，B的面积是14cm^2，C的面积是18cm^2，则D的面积为_____ cm^2.



【答案】24

【分析】根据正方形的面积公式，运用勾股定理可以证明：四个小正方形的面积和等于最大正方形的面积64，由此即可解决问题.

【详解】解：如图记图中三个正方形分别为P、Q、M.



根据勾股定理得到：A与B的面积的和是P的面积；C与D的面积的和是Q的面积；而P，Q的面积的和是M的面积.

即A、B、C、D的面积之和为M的面积.

$\because M$的面积是$8^2=64$，

$\therefore A$、B、C、D的面积之和为64，设正方形D的面积为$x\text{cm}^2$，

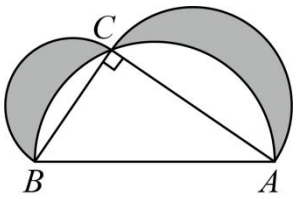
$\therefore 8+14+18+x=64$，

$\therefore x=24.$

故答案为：24.

【点睛】此题考查了勾股定理，正方形的面积，得出正方形 A，B，C，D 的面积和即是最大正方形 M 的面积是解题的关键.

【变式 3-2】如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，分别以各边为直径作半圆，图中阴影部分在数学史上称为“希波克拉底月牙”，若 $BC=3$，$AC=4$，则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】6

【分析】根据勾股定理求出 AB，分别求出三个半圆的面积和 $\triangle ABC$ 的面积，两小半圆与直角三角形的和减去大半圆即可得出答案.

【详解】解：在 Rt△ACB 中 $\angle ACB=90°$，$BC=3$，$AC=4$，

由勾股定理得：

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

阴影部分的面积为：

$$S=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{4}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2=6,$$

故答案为：6.

【点睛】本题主要考查勾股定理和圆有关的不规则图形的阴影面积．利用规则图形面积的和差关系求阴影面积是这类题型的关键．勾股定理是解决三角形中线段问题最有效的方法之一.

【变式 3-3】勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今.

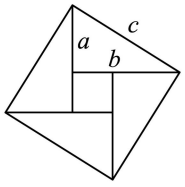


图1

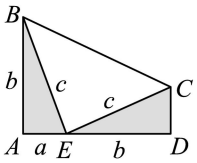


图2

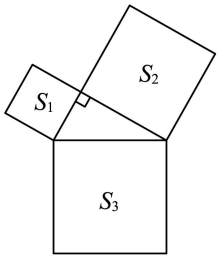


图3

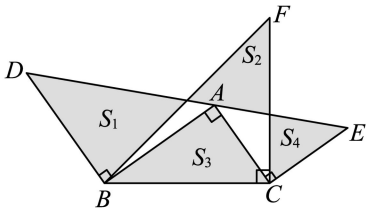


图4

(1)将两个全等的直角三角形按如图所示方式摆放，使点 A、E、D 在同一条直线上，请利用图 2 证明勾股定理.

(2)探究发现：如图 3 以直角三角形的三边为边，向外部作正方形面积分别为 S_1，S_2，S_3，请猜想 S_1，S_2，S_3 的等量关系，并证明你的结论.

(3)拓展应用：如图，Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，分别以$\triangle ABC$的三条边为直角边作三个等腰直角三角形：△ABD、△ACE、△BCF，若图中阴影部分的面积$S_1=7.5$，$S_2=3.5$，$S_3=5.5$，则S_4_.

【答案】(1)见解析

(2)$S_1+S_2=S_3$，见解析

(3)1.5

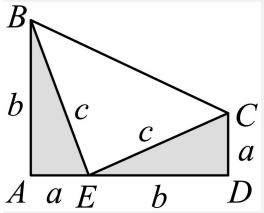
【分析】本题考查勾股定理的证明及运用；

（1）通过三个直角三角形的面积等于大直角梯形的面积可以推导出勾股定理；

（2）由题意得$S_1=a^2$，$S_2=b^2$，$S_3=c^2$，可得$S_1+S_2=S_3$；

（3）DE分别交BF、CF于点G、点H，设$AB=BD=a$，$AC=CE=b$，$BC=CF=c$，$S_{\triangle ABG}=m$，$S_{\triangle ACH}=n$，由$a^2+b^2=c^2$，可得$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACE}=S_{\triangle BCF}$，由此构建关系式，通过计算即可得到答案.

【详解】（1）证明：由题意得$S_{梯形ADCB}=S_{\triangle AEB}+S_{\triangle BEC}+S_{\triangle EDC}$，



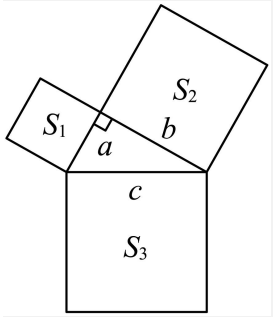
$\frac{(a+b)(a+b)}{2}=\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}$，

$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$，

$a^2+b^2=c^2$；

（2）解：$S_1+S_2=S_3$，理由如下，

如图，



$S_1=a^2$，$S_2=b^2$，$S_3=c^2$，

∵$a^2+b^2=c^2$，

∴$S_1+S_2=S_3$；

（3）解：如图，DE分别交BF、CF于点G、点H，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/855234323031011243