

第十章 动力问题的有限元法

动力问题:

结构受载荷作用没有达到平衡状态, 或由于结构的弹性和惯性而围绕平衡位置振动时, 其位移、应力、应变都是时间的函数, 除各点有位移外, 还有速度和加速度。

§ 10-1 结构的动力学方程

在动态情况下, 结构承受的载荷可以随时间而变化, 是时间的函数。按有限元方法, 将此载荷以作功等效的原则, 移置到结点上, 得到的结点载荷列阵 $\{Q\}$ 也应该是时间的函数, 用 $\{Q(t)\}$ 表示。

此外, 结构在运动中, 各点除位移外, 尚有速度和加速度, 分别用 $\{u\}$ 、 $\{\dot{u}\}$ 和 $\{\ddot{u}\}$ 表示。显然, $\{u\}$ 、 $\{\dot{u}\}$ 和 $\{\ddot{u}\}$ 不仅是坐标的函数, 还是时间的函数, 即

$$\{u\} = \{u(x, y, z, t)\}$$

$$\{\dot{u}\} = \{\dot{u}(x, y, z, t)\}$$

$$\{\ddot{u}\} = \{\ddot{u}(x, y, z, t)\}$$

采用有限元法对结构进行离散, 对任一单元, 若单元的结点位移为 $\{\delta\}^e$ 、单元的结点速度为 $\{\dot{\delta}\}^e$

、单元的结点加速度向量为 $\{\ddot{\delta}\}^e$ ，则单元内的位移可由结点位移插值得到，于是

$$\{u\} = [N]\{\delta\}^e \quad (10-1)$$

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{\delta}\}^e$$

$$\{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{\delta}\}^e$$

按照达朗贝尔原理，一个运动中的物体，若加上惯性力，则可看为静力平衡状态。

设材料密度为 ρ ，则结构内单位体积的惯性力为 $-\rho\{\ddot{u}\}$ ，这对结构来说，相当于受到另外一种体力分布载荷，大小与质点的加速度成正比，而方向与加速度方向相反。

另外，在介质中运动的质点总是会受到阻力作用，如阻力与速度成正比，则单位体积的阻力为 $-\mu\{\dot{u}\}$ ，表达式中 μ 为阻力系数，负号表明阻力方向与速度相反。

其次，设结构还受到体力 $\{q\}$ 和面积力 $\{p\}$ 作用，则结构所受总的体力为：

$$\{q\} - \mu\{\dot{u}\} - \rho\{\ddot{u}\}$$

根据达朗贝尔原理，结构受到所有力（包括惯性力）作用处于静力平衡，于是

$$[K]^e \{\delta\}^e = \iiint_{ve} [N]^T (\{q\} - \mu\{\dot{u}\} - \rho\{\ddot{u}\}) dv + \iint_{\Gamma^e} [N]^T \{p\} d\Gamma \quad (10-2)$$

上式等式右边的第一积分相当于体力的等效结点力。

将惯性力和阻力项代入上式，得

$$[K]^e \{\delta\}^e = \iint_{ve} [N]^T \{q\} dv + \iint_{\Gamma^e} [N]^T \{p\} d\Gamma - \iint_{ve} [N]^T \mu [N] \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e dv - \iint_{ve} [N]^T \rho [N] \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e dv$$

(10-3)

上式右边第一、第二项即为一般静力分析时的等效结点力，

令

$$\{Q\}^e = \iint_{ve} [N]^T \{q\} dv + \iint_{\Gamma^e} [N]^T \{p\} d\Gamma$$

(10-4)

$$\{Q\}_\rho^e = - \iint_{ve} [N]^T \rho [N] \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e dv \quad (10-5)$$

$$\{Q\}_\mu^e = - \iint_{ve} [N]^T \mu [N] \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e dv \quad (10-6)$$

$\{Q\}_\rho^e$ 、 $\{Q\}_\mu^e$ 分别为惯性力和阻力对应的等效结点力，考虑到积分与结点位移无关，于是

$$\{Q\}_\rho^e = - \left(\iint_{ve} [N]^T \rho [N] dv \right) \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e = -[M]^e \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e \quad (10-7)$$

$$\{Q\}_\mu^e = - \left(\iint_{ve} [N]^T \mu [N] dv \right) \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e = -[C]^e \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e \quad (10-8)$$

式中

$$[M]^e = \iint_{ve} [N]^T \rho [N] dv \quad (10-9)$$

称为单元质量矩阵，而

$$[C]^e = \iint_{ve} [N]^T \mu [N] dv \quad (10-10)$$

称为单位阻尼矩阵。

于是，单元动力方程化为

$$[M]^e \{\ddot{\mathbb{B}}\}^e + [C]^e \{\dot{\mathbb{B}}\}^e + [K]^e \{\delta\}^e = \{Q\}^e \quad (10-11)$$

若结构系统有 N_e 个单元，则对单元动力方程扩大后相加，得

$$[M] \{\ddot{\mathbb{B}}\} + [C] \{\dot{\mathbb{B}}\} + [K] \{\delta\} = \{Q\} \quad (10-12)$$

式中

$$[M] = \sum_{e=1}^{Ne} [M]^e$$

称为整个结构的质量矩阵，而

$$[C] = \sum_{e=1}^{Ne} [C]^e$$

称为整个结构的阻尼矩阵。

2. 质量矩阵

式（10-9）所表示的单元质量矩阵称为一致质量矩阵，因为形成质量矩阵所用的形函数与位移插值函数所用的形函数相同，单元的动能和位能是相互协调的。此外，还可采用一种较为简单的质量矩阵，它假定单元的质量团聚在单元的结点处，因此称为团聚质量矩阵。单元的一致质量矩阵是一满阵，而团聚质量矩阵为一对角阵。

以常应变三角形单元为例，一致质量矩阵

$$[M]^e = \iint_{ve} \rho [N]^T [N] dv$$
$$[M]^e = \frac{\rho h \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

团聚质量矩阵为

$$[M]^e = \frac{\rho h \Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 阻尼矩阵

式（10-10）所示的单元的阻尼矩阵还可进一步表示为

$$[C]^e = \iint_{v_e} [N]^T \mu [N] dv = \frac{\mu}{\rho} [M]^e$$

由此可见，当阻力正比于速度时，阻尼矩阵正比于单元的质量矩阵，这种阻尼称为粘滞阻尼。

此外，还可假定阻尼力正比于应变速度，此时

$$[C]^e = \mu \iint_{v_e} [B]^T [D][B] dv = \mu [K]^e$$

可见此时阻尼矩阵正比于单元的刚度矩阵。由材料内摩擦引起的阻尼通常可假设为这种情况。但结构的阻尼往往是多重因素造成的，为了能更一般地描述结构的阻尼，有关文献建议将单元阻尼表示为

$$[C]^e = [M]^e \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l ([M]^e)^{l-1} [K]^e$$

式中 α_l 为常系数，实际计算中，通常取前两项，于是得

$$[C]^e = \alpha [M]^e + \beta [K]^e \quad (10-13)$$

即认为阻尼矩阵是质量矩阵和刚度矩阵的线性组合，这种阻尼通常称为比例阻尼。

§ 10-2 无阻尼自由振动

为了计算动力方程，首先讨论无阻尼自由振动，即考虑

$$\begin{cases} [C]=0 \\ [Q]=0 \end{cases} \quad \text{的情况}$$

于是，动力学方程（10-12）变为

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (10-14)$$

这便是无阻尼自由振动方程，该方程组具有下列形式的解：

$$\{\delta\} = \{\phi\} \cos \omega t \quad (10-15)$$

将上式代入（10-14）式，得

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0 \quad (10-16)$$

记

$$\lambda = \omega^2$$

可将式（10-16）改写为

$$([K] - \lambda [M])\{\phi\} = 0 \quad (10-17)$$

求解方程组（10-17）的问题称为广义特征值问题，满足方程（10-17）的解 λ 及其相应的向量 $\{\phi\}$ 分别称为特征值和特征向量。由此求得的 $\omega = \sqrt{\lambda}$ 就是结构的固有频率，而 $\{\phi\}$ 为相应的固有振型。

我们已经知道，当结构上的约束足以消除刚体位移时，其总体刚度矩阵 $[K]$ 是对称正定的。由于材料的质量密度 $\rho > 0$

，不难证明，一致质量矩阵是正定的，而团聚质量矩阵是正定或半正定的对角阵，例如，对梁、板单元，当考虑转动自由度而忽略转动惯量时，团聚质量矩阵因与转动自由度相对应的对角元为零而成为半正定（不为零的元素全为正值）。

自由振动时，结构中各点的振幅不可能全为零，因而齐次方程组必有其系数行列式等于零，即

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0$$

它称为广义特征方程，如果矩阵 $[K]$ 的阶数为 n ，则广义特征方程是 λ 的 n 次代数方程，由此可解出 n 个广义特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，从而可得到 n 个固有频率 $\omega_i = \sqrt{\lambda_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

对每个固有频率 ω_i ，由式（10-17）可确定 n 维列向量 $\{\phi_i\}$ ，它代表 n 个质点的振幅构成的振型。 n 个特征值 λ_i 和相应的 n 个特征响量 $\{\phi_i\}$ 常称为 n 个特征对。

求标量 λ 和非零向量 $\{x\}$ ，使满足方程组

$$([A] - \lambda[I])\{x\} = 0$$

的问题，称为标准特征值问题，方程（10-19）的解 $\lambda = \lambda_i$ 和 $\{x\} = \{x_i\}$ 称为矩阵 $[A]$ 的特征值和特征向量。

广义特征值问题可以化为标准特征值问题，如果质量矩阵 $[M]$ 是正定的，可以将 $[M]$ 进行三角分解

$$[M] = [L][L]^T$$

其中 $[L]$ 为下三角阵，方程（10-17）可写为

$$([K] - \lambda[L][L]^T)\{\phi\} = 0$$

用 $[L]^{-1}$ 前乘上式，并注意到 $([L]^T)^{-1} = ([L]^{-1})^T$ ，则上式变为

$$([L]^{-1}[K]([L]^{-1})^T[L]^T - \lambda[L]^T)\{\phi\} = 0$$

若记

$$[A] = [L]^{-1}[K][L]^{-1)^T}, \quad \{x\} = [L]^T \{\phi\} \quad (10-20)$$

就得到了式（9-17）所对应的标准特征值问题。

如果 $[K]$ 是正定的，则 $[A]$ 也是对称正定的，且当 $[M]$ 为对角阵时， $[A]$ 是一个与 $[K]$ 相同的带状矩阵，在求得标准特征值问题的特征值 λ 和特征向量 $\{x\}$ 后，即可求得固有频率，并利用（10-20）求出相应的振型。

$$\omega = \sqrt{\lambda} \quad (10-21)$$

$$\{\phi\} = ([L]^T)^{-1} \{x\} \quad (10-22)$$

在总体刚度矩阵是正定的情况下，可以将 $[K]$ 进行三角分解

$$[K] = [\tilde{L}][\tilde{L}]^T$$

采用同样的方法，也可将（10-15）化为如下的标准特征值问题

$$([\tilde{A}] - \tilde{\lambda}[I])\{\tilde{x}\} = 0 \quad (10-23)$$

其中

$$[\tilde{A}] = [\tilde{L}]^{-1}[M][\tilde{L}]^{-1)^T}$$

$$\{\tilde{x}\} = [\tilde{L}]^T \{\phi\}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\omega^2}$$

若 $[M]$ 是对称正定的，则 $[\tilde{A}]$ 也是对称正定的，但它一般不是带状的。在求得特征值 $\tilde{\lambda}$ 和特征向量 $\{\tilde{x}\}$ 后，由式（10-24）可求得固有频率和和相应的振型。

$$\omega = 1/\sqrt{\tilde{\lambda}} \quad (10-25)$$

$$\{\phi\} = ([\tilde{L}]^T)^{-1} \{\tilde{x}\} \quad (10-26)$$

目前标准特征值问题已有充分的研究，有许多现成的算法和程序可供使用。

§ 10-3 特征值和特征向量的性质

在研究特征值问题求解之前，首先介绍特征值和特征向量的性质。

1. 实对称阵的特征值问题

可以证明：对于 $[K]$ 和 $[M]$ 均为实对称阵的广义特征值问题，其所有的特征值都为实数，所有的特征向量也为实向量。

事实上， n 阶对称阵 $[K]$ 和 $[M]$ 的元素都是实数，且有

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad m_{ij} = m_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

对广义特征值问题，应有

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}$$

即

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \phi_j = \lambda \sum_{j=1}^n m_{ij} \phi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

用 ϕ_i 的共轭数 $\bar{\phi}_i$ 乘上式的两端，并对 i 求和，得

$$\sum_{i,j=1}^n k_{ij} \phi_j \bar{\phi}_i = \lambda \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \phi_j \bar{\phi}_i \quad (10-28)$$

由于 $[K]$ 为对称阵，因此

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{k_{ij} \phi_j \bar{\phi}_i} = \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \bar{\phi}_j \phi_i = \sum_{i,j=1}^n k_{ji} \phi_i \bar{\phi}_j = \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \phi_j \bar{\phi}_i$$

即式(10-28)的左端 $\sum_{i,j=1}^n k_{ij} \phi_j \bar{\phi}_i$ 是实数，同理，式(10-28)的

右端 $\sum_{i,j=1}^n m_{ij} \phi_j \bar{\phi}_i$ 也是实数。因此，由式(10-28)可知 λ 必为实

数，从而由(10-27)解得的特征向量 $\{\phi\}$

也比为实向量。显然，若 $\{\phi\}$ 为特征向量，则 $\alpha\{\phi\}$ 也必为特征向量。

2. 特征向量的正则化

由上述可知，若 $\{\phi\}$ 为特征向量，则 $\alpha\{\phi\}$ 也必为特征向量，即相差一常数因子的一系列平行线均为特征向量，为确定起见，我们规定：

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1 \quad (10-29)$$

由此确定的特征向量称为正则化特征向量。式 (10-29) 就为正则化条件。

3. 特征向量的正交性

设 $(\lambda_i, \{\phi_i\})$ 和 $(\lambda_j, \{\phi_j\})$ 为广义特征值问题的两个特征对，则有

$$[K] \{\phi_i\} = \lambda_i [M] \{\phi_i\}$$

$$[K] \{\phi_j\} = \lambda_j [M] \{\phi_j\}$$

分别用 $\{\phi_i\}^T$ 和 $\{\phi_j\}^T$ 前乘上两式，得

$$\{\phi_j\}^T [K] \{\phi_i\} = \lambda_i \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_i\} \quad (\text{i})$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = \lambda_j \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} \quad (\text{ii})$$

(i) 式转置减 (ii)，考虑到 $[K]$ 和 $[M]$ 均为实对称阵，得

$$(\lambda_j - \lambda_i) \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0$$

若 $i \neq j$ ，且 $\omega_i \neq \omega_j$ ，则

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0 \quad (10-30)$$

这就是特征向量关于 $[M]$ 的正交性，将式 (10-29) 和

(10-30) 合并, 可写成

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = \delta_{ij} \quad (10-31)$$

其中 δ_{ij} 为 kronecker 符号。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

将式 (10-31) 代入 (ii) 得

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = \lambda_j \delta_{ij}$$

这说明特征向量对矩阵 $[K]$ 也具有正交性。

假设 $[\Phi]$

是由 n 个特征向量组成的特征向量矩阵，该矩阵称为模态矩阵，即

$$[\Phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (10-33)$$

设 $[\Lambda]$ 是由特征值组成的对角阵，即

$$[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n) \quad (10-34)$$

则特征向量的正交性可表示为

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Lambda]$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

4. 雷利 (Rayleigh) 商

关于特征值的性质还可以从雷利商出发去研究它，对于广义特征值问题，雷利商定义为

$$\rho(\{x\}) = \frac{\{x\}^T [K] \{x\}}{\{x\}^T [M] \{x\}} \quad (10-36)$$

式中 $\{x\}$ 为任一向量，设它可以由 n 特征向量的线性组合

表示，即

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n a_i \{\phi_i\} = [\Phi]\{a\} \quad (10-37)$$

式中 $\{a\}$ 是由 n 个系数组成的向量。将 (10-37) 代入 (10-36)，注意到特征向量的正交性，得

$$\rho(\{x\}) = \frac{\{a\}^T [\Lambda] \{a\}}{\{a\}^T \{a\}}$$

展开后可以写成

$$\rho(\{x\}) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (10-38)$$

将特征值由小到大排列：

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

可见，雷利商在最小特征值和最大特征值之间，即

$$\lambda_1 \leq \rho(\{x\}) \leq \lambda_n$$

并且，当 $\{x\} = \{\phi_1\}$ 时

$$\rho(\{x\}) = \rho(\{\phi_1\}) = \lambda_1$$

这说明，当 $\{x\}$ 取第 i 阶特征向量 $\{\phi_i\}$ 时，雷利商达到它的一个极值，该极值就是 $\{\phi_i\}$ 对应的特征值 λ_i ，特别是

$$\min \rho(\{x\}) = \rho(\{\phi_1\}) = \lambda_1$$

这就是雷利商的极小值原理，次原理常被工程界作为预估振型 $\{\phi_1\}$ 的依据，用以计算特征值 λ_1 ，从而求得基频 $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$ 的近似值。

如果 $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0 (2 \leq m \leq n-1)$ ，即向量 $\{x\}$ 与前 $m-1$

阶特征向量正交，则由式（10-38）看出：

$$\lambda_m \leq \rho(\{x\}) \leq \lambda_n$$

且当 $\{x\} = \{\phi_m\}$ 时

$$\min \rho(\{x\}) = \rho(\{\phi_m\}) = \lambda_m$$

这就是说， λ_m 是雷利商在向量 $\{x\}$ 与前 $m-1$ 阶特征向量正交条件的极小值。

5. 移位

对于广义特征值问题，可以使 $[K]$ 作一移位 μ

§ 10-4 迭代法

求解代数特征值问题的方法很多，这里介绍迭代法。

对于 n 阶广义特征值问题

$$[K]\{\phi\} = \omega^2 [M]\{\phi\}$$

当 $[K]$ 和 $[M]$ 均为正定阵时，我们已经证明了它有 n 个特征对。由 n 个特征向量可以构成模态矩阵

$$[\Phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n]$$

同时，为了说明迭代过程，令

$$\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n) \quad (10-39)$$

注意式 (10-39) 与式 (10-34) 中 λ_i 的区别，此时广义特征方程变为

$$\lambda [K]\{\phi\} = [M]\{\phi\}$$

用模态矩阵表示为

$$[K][\Phi][\Lambda] = [M][\Phi] \quad (10-40)$$

式 (10-40) 两边右乘任意向量

$$\{\alpha_0\} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^T$$

得

$$[K][\Phi][\Lambda]\{\alpha_0\} = [M][\Phi]\{\alpha_0\} \quad (10-41)$$

若 $[\Phi]$ 已知，将 $[\Lambda]\{\alpha_0\}$ 看为某一未知量 $\{\alpha_1\}$ ，则由 $\{\alpha_0\}$ 代入试式 (10-41)，求得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/855334323021011213>