【高中数学竞赛真题•强基计划真题考前适应性训练】

专题 06 不等式 真题专项训练 （全国竞赛+强基计划专用）

一、单选题

1．（2020·北京·高三强基计划）若正实数 x，y，z，w 满足 $x\ge y\ge w$ 和 $x+y\le 2(z+w)$，则 $\frac{w}{x}+\frac{z}{y}$ 的最小值等于（　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{7}{8}$　　C．1　　D．前三个答案都不对

【答案】D

【分析】利用基本不等式可求最小值，从而可得正确的选项.

【详解】根据题意，有 $\frac{w}{x}+\frac{z}{y}\ge\frac{w}{x}+\frac{x+y-2w}{2y}=\frac{w}{x}+\frac{x}{2y}+\frac{1}{2}-\frac{w}{y}\ge 2\sqrt{\frac{w}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+\frac{1}{2}-1\ge\sqrt{2}-\frac{1}{2}$，

等号当 $x:y:z:w=\sqrt{2}:1:\frac{\sqrt{2}-1}{2}:1$ 时取得，因此所求最小值为 $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

故选：D.

2．（2021·北京·高三强基计划）已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=3$，则 $\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)$ 的最小值是（　）

A．$417+240\sqrt{3}$　　B．$417-240\sqrt{3}$

C．417　　D．以上答案都不对

【答案】A

【分析】根据题设条件可设 $ab=1$，利用柯西不等式可求最小值.

【详解】由 $(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=3$ 可得 $\frac{a^2+b^2}{ab}\times\frac{1}{a+b}=c\times\frac{1}{ab}+\frac{1}{c}$，

由对称性可设 $ab=1$，则条件即 $(a+b-c)\left(a+b-\frac{1}{c}\right)=3$ 即 $c+\frac{1}{c}=\frac{a^2+b^2}{a+b}$，

从而 $\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge 2\Rightarrow a+b\ge 1+\sqrt{3}$，

根据柯西不等式 $\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(a^4+b^4+\frac{1}{c^4}\right)\ge\left(a^4+b^4+1\right)^2$

$=\left[(a+b)^4-4(a+b)^2+3\right]^2$

$\ge 417+240\sqrt{3}$，

等号当 $c=1,a+b=1+\sqrt{3}$ 时取得．因此所求最小值为 $417+240\sqrt{3}$.

故选：A.

3．（2021·北京·高三强基计划）若 a，b，c 为非负实数，且 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=25$，则 $a+b+c$ 的最小值为（　）

A．3　　B．5　　C．7　　D．以上答案都不对

【答案】B

【分析】利用非负性可求最小值.

【详解】根据题意，

有 $a+b+c=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=5$，

等号当 $(a,b,c)=(5,0,0)_{\text{cyc}}$ 时可以取得，因此所求最小值为 5.

故选：B.

二、填空题

4．（2021·北京·高三强基计划）在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\tan A\tan B+2\tan B\tan C+3\tan C\tan A$ 的最小值是_________.

【答案】$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

【分析】利用柯西不等式及三角形的恒等式可取最小值.

【详解】记题中代数式为 M，我们熟知三角形中的三角恒等式：$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$，

于是 $M=\tan A\tan B+2\tan B\tan C+3\tan C\tan A$

$$\geq\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A}$$

$=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$，

等号当 $\tan A\tan B=\sqrt{2}\tan B\tan C=\sqrt{3}\tan C\tan A\Rightarrow\tan A:\tan B:\tan C=\sqrt{2}:\sqrt{3}:1$ 时取得，因此所求最小值为 $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

故答案为：$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

5．（2021·全国·高三竞赛）已知正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2020}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=1$，则

$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{2020}^2}{a_{2020}+a_1}$ 的最小值为________.

【答案】$\frac{1}{2}$##0.5

【详解】由柯西不等式知

$$\left[\left(a_1+a_2\right)+\left(a_2+a_3\right)+\cdots+\left(a_{2220}+a_1\right)\right]\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{2020}^2}{a_{202}+a_1}\right)$$

$$\geq\left(a_1+a_2+\cdots+a_{220}\right)^2=1,$$

且$\left(a_1+a_2\right)+\left(a_2+a_3\right)+\cdots+\left(a_{2020}+a_1\right)=2$，所以$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{220}^2}{a_{2020}+a_1}\geq\frac{1}{2}$，

且当$a_1=a_2=\cdots=a_{2020}=\frac{1}{2020}$时取到等号.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

6．（2022·浙江·高二竞赛）设a，b，c，$d\in\mathbf{R}^+$，$abcd=1$，则$\sum\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4}\frac{1}{\Sigma a}$的最小值为______.

【答案】$\frac{73}{16}$

【详解】由题意可得$\frac{1}{d}=abc$，且$a\geq b\geq c\geq d$，

则$f(a)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+a^2b^2c^2+\frac{\frac{9}{4}}{a+b+c+\frac{1}{abc}}$，

原问题等价于求函数$f(a)$的最小值.

$$f'(a)=-2a^{-3}+2a\cdot b^2c^2-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(a+b+c+d)^2}\left(1-\frac{d}{a}\right)$$

$$=\frac{-2}{a^3}+2a\cdot\frac{1}{a^2d^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{a-d}{a(a+b+c+d)^2}$$

$$=\frac{2\left(a^2-d^2\right)}{a^3d^2}-\frac{9(a-d)a^2d^2}{4a^3(a+b+c+d)^2d^2}$$

$$=\frac{8\left(a^2-d^2\right)(a+b+c+d)^2-9(a-d)\left(a^2d^2\right)}{4a^3(a+b+c+d)^2d^2}$$

$$=\frac{a-d}{4a^3(a+b+c+d)^2d^2}\cdot\left(8(a+d)(a+b+c+d)^2-9a^2d^2\right),$$

$\because a+b+c+d\geq a+3d$，

$\therefore(a+b+c+d)^2\geq(a+3d)^2\geq 12ad$，

$\therefore 8(a+d)(a+b+c+d)^2-9a^2d^2$

$\ldots 8(a+d)\cdot 12ad-9a^2d^2=3ad\left[32(a+d)-3ad\right]$，

令 $g(a)=32(a+d)-3ad$， 则 $g^{'}(a)=32-3d$，

由 $a\ldots b\ldots c\ldots d$ 可得 $d\le 1$，

则 $g'(a)>0, g(a)$ 单调递增，

$\therefore g(a)\ldots g(d)=64d-3d^2=d(64-3d)>0$，

则 $f'(a)>0, f(a)$ 单调递增， $f(a)\ge f(d)$，

此时 $a=b=c=d=1$， $f(a)\ldots f(1)=\dfrac{73}{16}$.

故答案为： $\dfrac{73}{16}$.

7.（2021·全国·高三竞赛）设正实数 $a_1,a_2,\text{L} ,a_{2020}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{2020}a_i=1$， 则 $\min\limits_{1\le i\le 2020}\dfrac{a_i}{1+\sum\limits_{k=1}^{i}a_k}$ 最大值为_________.

【答案】 $1-\dfrac{1}{\sqrt[2020]{2}}$

【详解】解析：最大值为 $1-\dfrac{1}{\sqrt[2020]{2}}$.

记 $S=\min\limits_{1\le i\le 2020}\dfrac{a_i}{1+\sum\limits_{k=1}^{i}a_k}, x_i=1+\sum\limits_{k=1}^{i}a_k, x_0=1$， 则 $a_i=x_i-x_{i-1}$， 故 $S\le \dfrac{x_i-x_{i-1}}{x_i}=1-\dfrac{x_{i-1}}{x_i}$， 即 $1-S\ge \dfrac{x_{i-1}}{x_i}$， 对 $i=1,2,3,\text{L} ,2020$，

求和，并结合算术-几何平均不等式，

有 $2020(1-S)\ge \sum\limits_{i=1}^{2020}\dfrac{x_{i-1}}{x_i}\ge 2020\times\left(\dfrac{x_0}{x_{2020}}\right)^{\frac{1}{2020}}=\dfrac{2020}{\sqrt[2020]{2}}=\dfrac{2020}{20202}$，

故 $S\le 1-\dfrac{1}{\sqrt[2020]{2}}$， 等号当 $a_i=(\sqrt[2020]{2})^i-(\sqrt[2020]{2})^{i-1}(i=1,2,3,\text{L} ,2020)$ 时取到.

所以原式的最大值为 $1-\dfrac{1}{\sqrt[2020]{2}}$.

故答案为： $1-\dfrac{1}{\sqrt[2020]{2}}$.

8.（2021秋·天津河北·高三天津外国语大学附属外国语学校校考阶段练习）设 $x>0, y>0, x+2^y=5$，则当 x=_______时， $2^y x^{y+1}$ 取到最大值.

【答案】 $\dfrac{5}{2}$ ##2.5

【分析】巧妙利用换元 $z=\log_2 x$ 得到 $10=2^{z+1}+2^{y+1}$，

将 $M=2^y x^{y+1}$ 取对数运算得到 $\log_2 M=(y+1)(z+1)-1$，将所求问题转化为求 $(y+1)(z+1)$ 的最大值问题，由 $10=2^{z+1}+2^{y+1}$ 使用两次基本不等式可求出 $(y+1)(z+1)$ 的最大值，考查等号取得条件即可.

【详解】设 $M=2^y x^{y+1}$，则 $\log_2 M=y+(y+1)\log_2 x$，设 $z=\log_2 x$ ，则 $x=2^z$，

可知 $2^z+2^y=5$， $\log_2 M=y+(y+1)z=(y+1)(z+1)-1$.

$10=2^{z+1}+2^{y+1}\ge 2\cdot 2^{\frac{z+1+y+1}{2}}\ge 2\cdot 2^{\sqrt{(z+1)(y+1)}}$，(当且仅当 $z=y$，即 $x=2^y=\frac{5}{2}$ 时取等号.)

所以 $5\ge 2^{\sqrt{(z+1)(y+1)}}$，故 $(y+1)(z+1)$ 有最大值 $(\log_2 5)^2$，

所以 $\log_2 M$ 就有最大值，即 $M=2^y x^{y+1}$ 有最大值.

故答案为: $\frac{5}{2}$.

【点睛】使用基本不等式求最值关键是要有定值才能求最值，没有明显的定值要进行变形拼凑.在此题中拼凑的定值有:① $2^z+2^y=5$ 及 $10=2^{z+1}+2^{y+1}$，为求 $(z+1)+(y+1)$ 最大值做准备;② 通过提取公因式实现因式分解拼凑乘积， $y+(y+1)z=(y+1)(z+1)-1$ ，产生了 $(y+1)(z+1)$ 与上面 $(z+1)+(y+1)$ 遥相呼应，可以使用基本不等式.

三、解答题

9.（2023·全国·高三专题练习） 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i\in \mathrm{R}[x]$，满足 $0\le a_i\le a_0, i=1,2,\cdots,n$. 又设 $b_i\left(i=0,1,\cdots,2n\right)$ 满足 $[f(x)]^2=\sum_{i=0}^{2n}b_i x^i$，证明： $b_{n+1}\le\frac{1}{2}\left[f\left(1\right)\right]^2$.

【答案】证明见解析.

【分析】根据给定条件，利用多项式平方运算求出 $[f(x)]^2$，再利用赋值法结合已知及进行不等式的放缩，推理判断作答.

【详解】$[f(x)]^2=(\sum_{i=0}^{n}a_i x^i)^2=\sum_{s=0}^{2n}(\sum_{i+j=s}a_i a_j)x^s$，于是 $b_s=\sum_{i+j=s}a_i a_j$，

$$\frac{1}{2}[f(1)]^2=\frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n}a_i)^2=\frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n}a_i^2+2\sum_{0\le i<j\le n}a_i a_j)\ge\frac{1}{2}(2\sum_{0\le i<j\le n}a_i a_j)=\sum_{0\le i<j\le n}a_i a_j\ge\sum_{0=i<j\le n}a_i a_j=a_0\sum_{j=1}^{n}a_j,$$

因为 $0\le a_i\le a_0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$b_{n+1}=\sum_{i+j=n+1}a_i a_j=a_1 a_n+a_2 a_{n-1}+\cdots+a_n a_1\le a_0 a_n+a_0 a_{n-1}+\cdots+a_0 a_1=a_0\sum_{j=1}^{n}a_j\le\frac{1}{2}[f(1)]^2,$$

所以 $b_{n+1}\le\frac{1}{2}[f(1)]^2$.

10．（2023·全国·高三专题练习）设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$， $g(x)=\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i$ 是两个实系数非零多项式，且存在实数 r 使得 $g(x)=(x-r)f(x)$. 记 $a=\max\limits_{0\le i\le n}\{|a_i|\},c=\max\limits_{0\le i\le n+1}\{|c_i|\}$，证明：$a\le(n+1)c$.

【答案】证明见解析.

【分析】根据给定条件，利用多项式恒等定理求出多项式 $f(x),g(x)$ 的对应项系数的关系，再按 $|r|\le1$ 和 $|r|>1$ 讨论，并结合含绝对值不等式的性质推理作答.

【详解】因为 $g(x)=(x-r)f(x)$，即

$$\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i=(x-r)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{i+1}-\sum_{i=0}^{n}ra_ix^i=-ra_0+\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}-ra_i)x^i+a_nx^{n+1},$$

则有 $c_0=-ra_0,c_i=a_{i-1}-ra_i\,(i=1,2,\cdots,n),c_{n+1}=a_n$，

于是 $a_n=c_{n+1},a_{n-1}=c_n+rc_{n+1},a_{n-2}=c_{n-1}+rc_n+r^2c_{n+1},\cdots,a_0=c_1+rc_2+r^2c_3+\cdots+r^nc_{n+1}$，

若 $|r|\le1$，则 $|a_n|=|c_{n+1}|\le c,|a_{n-1}|=|c_n+rc_{n+1}|=|c_n|+|r|\cdot|c_{n+1}|\le 2c$，

$|a_{n-2}|=|c_{n-1}+rc_n+r^2c_{n+1}|\le|c_{n-1}|+|r|\cdot|c_n|+r^2|c_{n+1}|\le3c,\cdots$，

$|a_0|=|c_1+rc_2+r^2c_3+\cdots+r^nc_{n+1}|\le|c_1|+|r|\cdot|c_2|+|r^2|\cdot|c_3|+\cdots+|r^n|\cdot|c_{n+1}|\le(n+1)c$，

所以 $|a_i|\le(n+1)c$，于是 $a\le(n+1)c$，

若 $|r|>1$，则 $\frac{1}{|r|}<1$，由 $c_0=-ra_0,c_i=a_{i-1}-ra_i\,(i=1,2,\cdots,n),c_{n+1}=a_n$，

得 $a_0=-\frac{1}{r}c_0,a_i=\frac{1}{r}a_{i-1}-\frac{1}{r}c_i\,(i=1,2,\cdots,n),a_n=c_{n+1}$，

于是 $a_0=-\frac{1}{r}c_0,a_1=\frac{1}{r}a_0-\frac{1}{r}c_1=-\frac{1}{r^2}c_0-\frac{1}{r}c_1,a_2=\frac{1}{r}a_1-\frac{1}{r}c_2=-\frac{1}{r^3}c_0-\frac{1}{r^2}c_1-\frac{1}{r}c_2,\cdots$，

$a_{n-1}=-\frac{1}{r^n}c_0-\frac{1}{r^{n-1}}c_1-\cdots-\frac{1}{r}c_{n-1},a_n=c_{n+1}$，

于是 $|a_0|=\left|-\frac{1}{r}c_0\right|=\frac{1}{|r|}|c_0|<c,|a_1|=\left|-\frac{1}{r^2}c_0-\frac{1}{r}c_1\right|\le\frac{1}{|r^2|}|c_0|+\frac{1}{|r|}|c_1|<2c$，

$|a_2|=\left|-\frac{1}{r^3}c_0-\frac{1}{r^2}c_1-\frac{1}{r}c_2\right|\le\frac{1}{|r^3|}|c_0|+\frac{1}{|r^2|}|c_1|+\frac{1}{|r|}|c_2|<3c,\cdots$，

$|a_{n-1}|=\left|-\frac{1}{r^n}c_0-\frac{1}{r^{n-1}}c_1-\cdots-\frac{1}{r}c_{n-1}\right|\le\frac{1}{|r^n|}|c_0|+\frac{1}{|r^{n-1}|}|c_1|+\cdots+\frac{1}{|r|}|c_{n-1}|<nc,|a_n|=|c_{n+1}|\le c$，

所以 $|a_i|<nc$，于是 $a<(n+1)c$，

综上得：$a \le (n+1)c$.

11.（2021·全国·高三竞赛）已知：a，b，$c \ge 0, a+b+c=2$，求证：

$$\frac{bc}{1+abc(a+b)}+\frac{ca}{1+abc(b+c)}+\frac{ab}{1+abc(c+a)} \le 1.$$

【答案】证明见解析

【详解】$1+abc(a+b)-(ab+bc+ca)=\left[1-c(a+b)\right]\times(1-ab)$，

因为 a，b，$c \ge 0, a+b+c=2$，所以 $c(a+b) \le 1, ab \le 1$.

于是 $1+abc(a+b) \ge ab+bc+ca$，

同理 $1+abc(b+c) \ge ab+bc+ca$，$1+abc(c+a) \ge ab+bc+ca$.

则：$\dfrac{bc}{1+abc(a+b)}+\dfrac{ca}{1+abc(b+c)}+\dfrac{ab}{1+abc(c+a)}$

$\le \dfrac{bc}{ab+bc+ca}+\dfrac{ca}{ab+bc+ca}+\dfrac{ab}{ab+bc+ca}=1$.

故题中的不等式成立.

12.（2021·全国·高三竞赛）求所有的正实数 a，使得存在实数 x 满足 $a^{2\sin^2 x}+a^{\cos 2x} \ge 2$.

【答案】$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup [1,+\infty)$

【详解】设 $t=a^{2\sin^2 x}$，则不等式化为 $t+\dfrac{a}{t}-2 \ge 0$.

当 $0<a<1$ 时，$t \in [a^2,1]$；

当 $a=1$ 时，$t=1$；当 $a>1$ 时，$t \in [1,a^2]$.

因此不等式可化为 $t^2-2t+a \ge 0$.

设 $f(t)=t^2-2t+a$，考虑 $f(t)$ 在 1 和 a^2 之间恒小于零，则 $f(1)<0, f(a^2)<0, a>0$，

故 $\begin{cases} a<1 \\ (a-1)(a^2+a-1)<0 \end{cases}$，

解得 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1$. 所以 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup [1,+\infty)$.

13.（2022·新疆·高二竞赛）（1）若实数 x，y，z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，证明：$|x-y|+|y-z|+|z-x| \le 2\sqrt{2}$；

（2）若 2023 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2023}$ 满足 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2023}^2=1$，求 $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{2022}-x_{2023}|+|x_{2023}-x_1|$

的最大值.

【答案】（1）证明见解析；（2） $2\sqrt{2022}$.

【详解】（1）不妨设 $x \le y \le z$ ，

则 $|x-y|+|y-z|+|z-x|=y-x+z-y+z-x$

$=2(z-x)=2\sqrt{x^2+z^2-2xz} \le 2\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)} \le 2\sqrt{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}=2\sqrt{2}$.

（2）因为 2023 为奇数，则 $x_1, x_2 \cdots \cdots x_i \cdots x_{2023}, x_1$ 中必存在 x_i, x_{i+1} （令 $x_{2024}=x_1$ ）同号，

不妨设 x_1, x_2 同号，则：

$$\sum_{i=1}^{2023}\left|x_i-x_{i+1}\right|=\left|x_1-x_2\right|+\sum_{i=2}^{323}\left|x_i-x_{i+1}\right| \le \left|x_1-x_2\right|+\left|x_2\right|+\left|x_1\right|+2\sum_{i=3}^{2023}\left|x_i\right|=S .$$

不妨设 $x_2 \ge x_1 \ge 0$ ，则 $\left|x_1-x_2\right|+\left|x_2\right|+\left|x_1\right|=2x_2$ ，所以：

$$S=2\left|x_2\right|+2\sum_{i=3}^{2023}\left|x_i\right| \le 2\sqrt{2022}\left(\sqrt{x_2^2+\sum_{i=3}^{2023}x_i^2}\right) \le 2\sqrt{2022}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{2023}x_i^2}\right)=2\sqrt{2022} .$$

当且仅当 $x_1=0, x_2=x_4=\cdots=\frac{1}{\sqrt{2022}}, x_1=x_3=\cdots=-\frac{1}{\sqrt{2022}}$

或 $x_1=0, x_2=x_4=\cdots=-\frac{1}{\sqrt{2022}}, x_1=x_3=\cdots=\frac{1}{\sqrt{2022}}$ 时等号成立.

因此 $\left|x_1-x_2\right|+\left|x_2-x_3\right|+\cdots+\left|x_{2022}-x_{2023}\right|+\left|x_{2023}-x_1\right|$ 的最大值为 $2\sqrt{2022}$.

14.（2021·全国·高三竞赛）设 m 为正整数，且 $n=m^2+1$，求所有的实数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得

$x_i=1+\frac{2mx_i^2}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，对所有 $i=1,2,\cdots,n$ 成立.

【答案】证明见解析.

【分析】第一步化简原式，第二步利用 $AM-GM$ 不等式即可得到 $k=1$ 或 m^2 ，这两种情况是对称的，不妨证明 $k=1$ 的时候成立，所以原式成立.

【详解】由已知 $x_i=1+\frac{2mx_i^2}{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}, i=1,2,\cdots,n$ ，得 $\sum_{j=1}^{n}x_j^2=\frac{2mx_i^2}{x_i-1}$ ，故 $\frac{2mx_i^2}{x_i-1}$ 全相等.

注意到若实数 $a \ne b$ 满足 $\frac{a^2}{a-1}=\frac{b^2}{b-1}$ ，则 $ab=a+b$ ，即 $a=\frac{b}{b-1}$. 因此 $x_i \in \left\{b, \frac{b}{b-1}\right\}$ ， $b \ne 0, i=1,2,\cdots,n$.

设 x_i 中有 $\frac{b}{b-1}$ ， $n-k=m^2+1-k$ 个 b，则有 $0 \le k \le m^2+1$ ，且

$$k \cdot \frac{b^2}{(b-1)^2}+\left(m^2+1-k\right)b^2=\frac{2mb^2}{b-1} ,$$

即 $\dfrac{k}{b-1}+\left(m^2+1-k\right)(b-1)=2m$.

由 $AM-GM$ 不等式，若 $0<k<m^2+1$，

$\dfrac{k}{b-1}+\left(m^2+1-k\right)(b-1)\geq 2\sqrt{k\left(m^2+1-k\right)}\geq 2m$，

因此必取等，即 $k=1$ 或 m^2，这两种情况是对称的，不妨 $k=1$，则

$\dfrac{1}{b-1}+m^2(b-1)=2m$，

知 $b-1=\dfrac{1}{m}$，则 $b=\dfrac{m+1}{m},a=m+1$.

若 $k=0$，则 $\left(m^2+1\right)(b-1)=2m$，即 $b=\dfrac{(m+1)^2}{m^2+1},a=\dfrac{(m+1)^2}{2m}$.

若 $k=m^2+1$，则 $\dfrac{m^2+1}{b-1}=2m$，即 $b=\dfrac{(m+1)^2}{2m},a=\dfrac{(m+1)^2}{m^2+1}$.

综上可知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 要么 1 个 $m+1,m^2$ 个 $\dfrac{m+1}{m}$；要么全是 $\dfrac{(m+1)^2}{m^2+1}$.

15.（2021·全国·高三竞赛）求最大的正实数 λ，使得对任意正整数 n 及正实数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，均有

$\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{x_k}\geq\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_0+x_1+\cdots+x_k}$. .

【答案】λ 的最大值为 3.

【分析】先取 $x_0=x_1=1,x_2=2,x_3=4,\cdots,x_n=2^{n-1}$，通过对其求和可得 λ 的范围，再利用放缩法可得 $\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\geq\dfrac{3}{x_0+x_1}+\dfrac{3}{x_0+x_1+x_2}+\cdots+\dfrac{3}{x_0+x_1+\cdots+x_n}$，最后求出最大的正实数 λ 的值.

【详解】一方面，取 $x_0=x_1=1,x_2=2,x_3=4,\cdots,x_n=2^{n-1}$，得

$3-\dfrac{1}{2^{n-1}}\geq\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}$

即

$3-\dfrac{1}{2^{n-1}}\geq\lambda\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

令 $n\to\infty$，得 $\lambda\leq 3$.

另一方面对正实数 x，y 有 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$，故

$\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{x_1}\geq\dfrac{4}{x_0+x_1}$，

$\dfrac{1}{x_0+x_1}+\dfrac{1}{x_2}\geq\dfrac{4}{x_0+x_1+x_2}$，

$\dfrac{1}{x_0+x_1+x_2}+\dfrac{1}{x_3}\geq\dfrac{4}{x_0+x_1+x_2+x_3}$，

……

$$\frac{1}{x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}\geq\frac{4}{x_0+x_1+\cdots+x_n}.$$

以上各式相加，得

$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geq\frac{3}{x_0+x_1}+\frac{3}{x_0+x_1+x_2}+\cdots+\frac{3}{x_0+x_1+\cdots+x_n}.$$

故 $\lambda=3$ 时，原不等式恒成立．综上，λ 的最大值为 3．

16.（2021·全国·高三竞赛）已知 $0<x_i<1(i\in\{0,1,\cdots,10\})$ 证明：存在 $i,j\in\{0,1,2,\cdots,10\}$，使得

$0<x_ix_j\left(x_j-x_i\right)<\frac{1}{30}$.

【答案】证明见解析

【详解】不妨 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_{10}$，设 $f(i,j)=x_ix_j\left(x_j-x_i\right)$，

当 $0\leq i\leq j\leq 10$ 时，因为 $3x_ix_j\left(x_j-x_i\right)\leq\left(x_i^2+x_ix_j+x_j^2\right)\left(x_j-x_i\right)=x_j^3-x_i^3$，

即 $3f(i,j)\leq x_j^3-x_i^3$，当且仅当 $i=j$ 时，等号成立.

故 $\sum_{i=1}^{10}3f\left(i-1,i\right)<\sum_{i=1}^{10}\left(x_i^3-x_{i-1}^3\right)<1$，所以存在 $i\in\{1,2,\cdots,10\}$，使得 $3f(i-1,i)<\frac{1}{10}$，即 $f(i-1,i)<\frac{1}{30}$.

所以存在 $i,j\in\{0,1,2,\cdots,10\}$，使得 $0<x_ix_j\left(x_j-x_i\right)<\frac{1}{30}$.

17.（2021·全国·高三专题练习）已知：$a>0$，$b>0$，$a+b=1$.求证：$\sqrt{2}<\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\leq 2$.

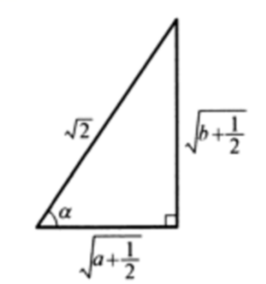
【答案】证明见解析.

【分析】构造一个直角三角形，使其两直角边长分别为 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}$ 和 $\sqrt{b+\frac{1}{2}}$，而斜边之长则为 $\sqrt{2}$（如图所示），证明不等式 $\sqrt{2}<\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$ 成立；再证明 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\leq 2$,即得证.

【详解】证明：为了使得条件 $a+b=1$ 与待证式的中间部分在形式上接近一些，我们将该条件作如下变形：

$\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(b+\frac{1}{2}\right)=2$，进而有 $\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2=(\sqrt{2})^2$.①

我们来构造这样一个直角三角形，使其两直角边长分别为 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}$ 和 $\sqrt{b+\frac{1}{2}}$，而斜边之长则为 $\sqrt{2}$（如图所示）.显然，这个直角三角形的三边长之间的关系是符合①的，从而满足条件 $a+b=1$.



由图所示，根据定理“三角形任意两边之和大于第三边”，而有不等式 $\sqrt{2}<\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$ 成立.

至于这个双联不等式的右边部分，也可由图，并根据直角三角形的边角关系知 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\cos\alpha$，$\sqrt{b+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sin\alpha$.

于是有 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\le 2$

$\therefore$ 所证不等式 $\sqrt{2}<\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\le 2$ 成立.

18．（2021·全国·高三专题练习）已知 a，b 为正数，且 $a^{1}\ b$，证明 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

【答案】证明见解析

【分析】如图所示，可先构造 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，再构造 $\mathrm{Rt}\nabla BCD$，最后，作 $\mathrm{Rt}\triangle BC'D\cong\mathrm{Rt}\triangle BCD$，由图形直观得 $AB>BC>BD>BE$，即得证.

【详解】证明：由于 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$.

可先构造 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使得 $BC=\frac{a+b}{2}$，$AC=\frac{a-b}{2}$，如图所示.