

2024 届云南民族大学附中高三第三次教学质量检测试题数学试题试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直三棱柱中 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = CC_1 = 1$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角的正弦值为（ ）。

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

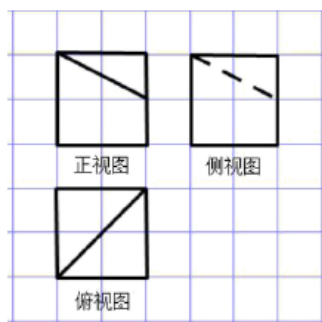
2. 已知抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A 是 l 上一点， B 是直线 AF 与抛物线 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$ ，则 $|BF| =$ （ ）

- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

3. 数列 $\{a_n\}$ ，满足对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$ ，均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值。若 $a_7 = 2$ ， $a_9 = 3$ ， $a_{98} = 4$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和 $S_{100} =$ （ ）

- A. 132 B. 299 C. 68 D. 99

4. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位： cm^3 ）为（ ）



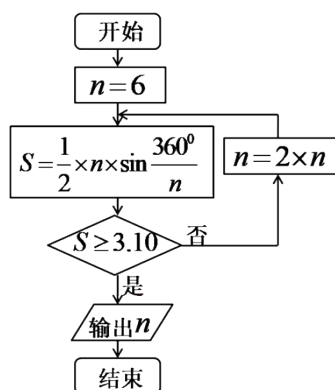
- A. $\frac{16}{3}$ B. 6 C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{22}{3}$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ， $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ ，则 $a_3 + a_5 + a_7 =$ （ ）

- A. 21 B. 42 C. 63 D. 84

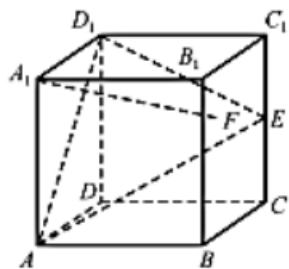
6. 公元 263 年左右，我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时，多边形面积可无限逼近圆的面积，并创立了“割圆术”，利用“割圆术”刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14，这就是著名的“徽率”。如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图，则输出的 n 值为（ ）（参考数据：

$$\sqrt{3} \approx 1.732, \sin 15^\circ \approx 0.2588, \sin 75^\circ \approx 0.9659$$



- A. 48 B. 36 C. 24 D. 12

7. 在正方体 AC_1 中, E 是棱 CC_1 的中点, F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点, 且 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直, 如图所示, 下列说法不正确的是 ()



- A. 点 F 的轨迹是一条线段 B. A_1F 与 BE 是异面直线
C. A_1F 与 D_1E 不可能平行 D. 三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值

8. 已知 $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \beta$, 则下列是等式 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 成立的必要不充分条件的是 ()

- A. $\sin \alpha > \sin \beta$ B. $\sin \alpha < \sin \beta$
C. $\cos \alpha > \cos \beta$ D. $\cos \alpha < \cos \beta$

9. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作直线与抛物线在第一象限交于点 A , 与准线在第三象限交于点 B , 过点 A 作准线的垂线, 垂足为 H . 若 $\tan \angle AFH = 2$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} =$ ()

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

10. 设实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ 2x - y + 3 \leq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ 则 $x + y + 1$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

- A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x | x \geq -1\}$

12. 若函数 $y = 2\sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$, 则函数 $f(x) = \sin(2x - \varphi) + \cos(2x - \varphi)$ 图象的一条对称轴的方程可以为()

- A. $x = -\frac{\pi}{24}$ B. $x = \frac{37\pi}{24}$ C. $x = \frac{17\pi}{24}$ D. $x = -\frac{13\pi}{24}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 定义 $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$, 已知 $f(x) = e^x - \frac{1}{m}$, $g(x) = (x-1)(mx + 2m^2 - m - 1)$, 若

$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 恰好有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n$, 则 $a_n =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{(e^x - ax)(e^x - \ln x)}{\ln x - ax}$, 若在定义域内恒有 $f(x) < 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | 1 - 2x < 5\}$, $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{a}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 求实数 a 的最大值;

(2) 若 $0 < a < 1$, 求证: $f(x) \geq \frac{2 + \ln a}{a}$.

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 5$, $a_5 = 14$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2b_n - 1$.

(1) 求 a_n, b_n ;

(2) 若 $c_n = (-1)^n a_n + b_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{\sin A}{\sqrt{3} \sin C}$.

(1) 求 b 的值;

(2) 若 $\cos B + \sqrt{3} \sin B = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(1, 0)$, 若以线段 PQ 为直径的圆与 y 轴相切.

(1) 求点 Q 的轨迹 C 的方程;

(2) 若 C 上存在两动点 A, B (A, B 在 x 轴异侧) 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 32$, 且 $\triangle PAB$ 的周长为 $2|AB| + 2$, 求 $|AB|$ 的值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = mx^2 \left(\ln x + \frac{1}{2} \right)$.

(I) 若 $m = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 当 $m \in \mathbb{R}$ 时, 要使 $f(x) > x \ln x$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足, $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbb{N}^*).$$

(I) 求 a_n 与 b_n ;

(II) 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{b_n b_{n+2}}, n \text{ 为奇数}, \\ -\frac{1}{a_n}, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 若对 $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{2n} \geq T_{2k}$ 恒成立, 求正整数 k 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

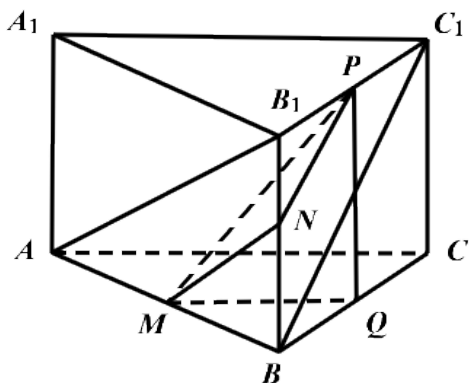
【解析】

设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点, 得出  的夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角, 根据中位线定理,

结合余弦定理求出 AC, MQ, MP 和 $\angle MNP$ 的余弦值再求其正弦值即可.

【详解】

根据题意画出图形:



设 M, N, P 分别为 AB, BB_1 和 B_1C_1 的中点,

则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BB_1}$ 的夹角为 MN 和 NP 夹角或其补角

$$\text{可知 } MN = \frac{1}{2} AB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad NP = \frac{1}{2} BC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

作 BC 中点 Q , 则 $VPQM$ 为直角三角形;

$$PQ = 1, MQ = \frac{1}{2} AC$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

$$\therefore AC = \sqrt{7}, \quad MQ = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{在 } \triangle MQP \text{ 中, } MP = \sqrt{MQ^2 + PQ^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

在 $\triangle MNP$ 中, 由余弦定理得

$$\cos \angle MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - PM^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{所以 } \sin \angle MNP = \sqrt{1 - \cos^2 \angle MNP} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

故选: C

【点睛】

此题考查异面直线夹角，关键点通过平移将异面直线夹角转化为同一平面内的夹角，属于较易题目.

2、D

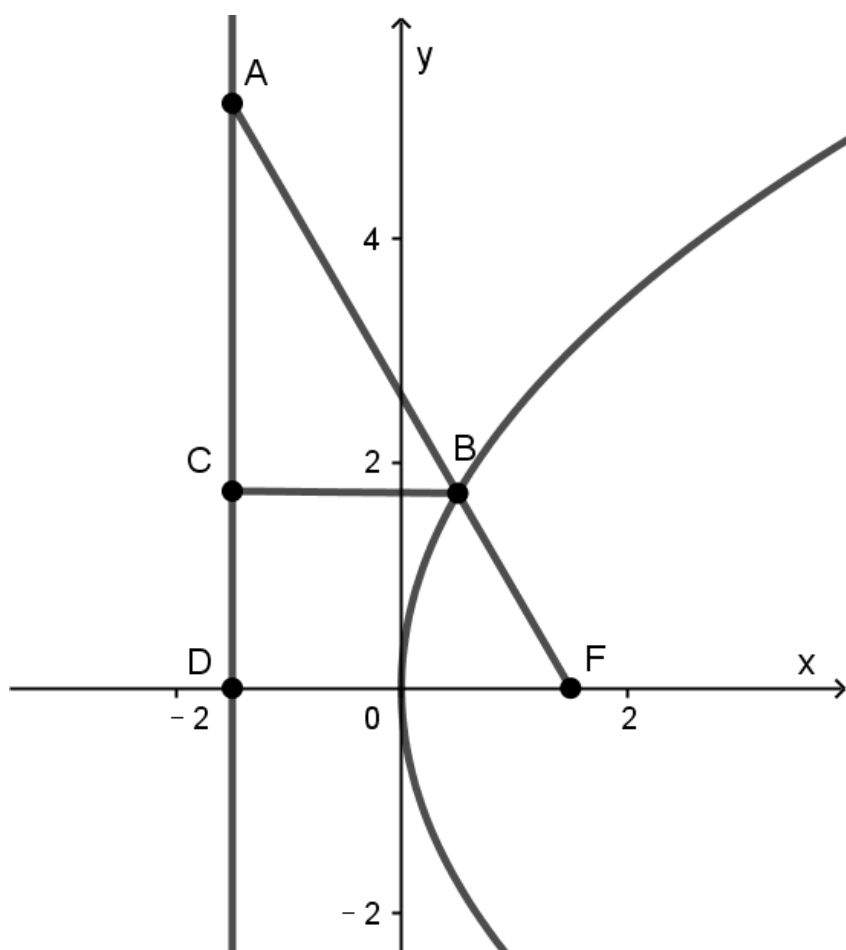
【解析】

根据抛物线的定义求得 $|AF|=6$ ，由此求得 $|BF|$ 的长.

【详解】

过 B 作 $BC \perp l$ ，垂足为 C ，设 l 与 x 轴的交点为 D .根据抛物线的定义可知 $|BF|=|BC|$.由于 $\vec{FA}=3\vec{FB}$ ，所以 $|AB|=2|BC|$ ，所以 $\angle CAB=\frac{\pi}{6}$ ，所以 $|AF|=2|FD|=6$ ，所以 $|BF|=\frac{1}{3}|AF|=2$.

故选：D



【点睛】

本小题主要考查抛物线的定义，考查数形结合的数学思想方法，属于基础题.

3、B

【解析】

由 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值，可得 $a_{n+3} = a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 是以3为周期的数列，求出 a_1, a_2, a_3 ，即求 S_{100} .

【详解】

对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$ ，均有 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ 为定值，

$$\therefore (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = 0,$$

$$\text{故 } a_{n+3} = a_n,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列，

$$\text{故 } a_1 = a_7 = 2, a_2 = a_8 = 4, a_3 = a_9 = 3,$$

$$\therefore S_{100} = (a_1 + a_2 + a_3) + L + (a_{97} + a_{98} + a_{99}) + a_{100} = 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1$$

$$= 33(2 + 4 + 3) + 2 = 299.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查周期数列求和，属于中档题.

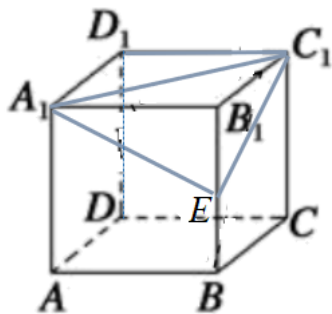
4、D

【解析】

根据几何体的三视图，该几何体是由正方体去掉三棱锥得到，根据正方体和三棱锥的体积公式可求解.

【详解】

如图,该几何体为正方体去掉三棱锥 $B_1 - A_1C_1E$,



$$\text{所以该几何体的体积为: } V = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - V_{B_1-A_1C_1E} = 2 \times 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{22}{3},$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查了空间几何体的三视图以及体积的求法，考查了空间想象力，属于中档题.

5、B

【解析】

$$\text{由 } a_1 + a_3 + a_5 = 21 \text{ 得 } a_1(1 + q^2 + q^4) = 21 \therefore 1 + q^2 + q^4 = 7 \therefore q^2 = 2 \therefore a_3 + a_5 + a_7 = q^2(a_1 + a_3 + a_5) = 2 \times 21 = 42, \text{ 选 B.}$$

$\therefore AF$ 与 D_1E 不可能平行, $\therefore C$ 错误.

对于 D , 因为 $MN \parallel EG$, 则 F 到平面 AD_1E 的距离是定值, 三棱锥 $F-AD_1E$ 的体积为定值, 所以 D 正确;

故选: C .

【点睛】

本题考查了正方形的性质、空间位置关系、空间角、简易逻辑的判定方法, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

8、D

【解析】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$, $f(x) = \sin x - 2x$, 利用导数分析出这两个函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数, 由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得出 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$, 分 $\alpha = 0$ 、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ 、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 三种情况讨论, 利用放缩法结合函数 $y = h(x)$ 的单调性推导出 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$ 或 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 再利用余弦函数的单调性可得出结论.

【详解】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$, $f(x) = \sin x - 2x$,

则 $h'(x) = \cos x - 1 < 0$, $f'(x) = \cos x - 2 < 0$,

所以, 函数 $y = f(x)$ 、 $y = h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数,

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, 则 $h(x) > h(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$; 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $h(x) < 0$, $f(x) < 0$.

由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$.

①若 $\alpha = 0$, 则 $\sin \beta - 2\beta = 0$, 即 $f(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0$, 不合乎题意;

②若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 则 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, 则 $h(\alpha) = \sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta > \sin \beta - \beta = h(\beta)$,

此时, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$,

由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增, 则 $\sin \alpha < \sin \beta$,

$\cos \alpha < \cos \beta$;

③若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $h(\alpha) = \sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta < \sin \beta - \beta = h(\beta)$,

此时 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 则 $\sin \alpha > \sin \beta$,

$$\cos \alpha < \cos \beta.$$

综上所述, $\cos \alpha < \cos \beta$.

故选: D.

【点睛】

本题考查函数单调性的应用, 构造新函数是解本题的关键, 解题时要注意对 α 的取值范围进行分类讨论, 考查推理能力, 属于中等题.

9、C

【解析】

需结合抛物线第一定义和图形, 得 $\triangle AFH$ 为等腰三角形, 设准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 作 $FC \perp AH$, 再由三角

函数定义和几何关系分别表示转化出 $|BF| = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$,

$|AF| = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$, 结合比值与正切二倍角公式化简即可

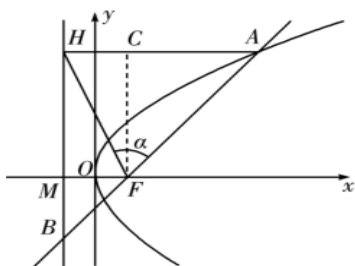
【详解】

如图, 设准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 作 $FC \perp AH$. 由抛物线定义知 $|AF| = |AH|$,

所以 $\angle AHF = \angle AFH = \alpha$, $\angle FAH = \pi - 2\alpha = \angle OFB$, $|BF| = \frac{|MF|}{\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$,

$|AF| = \frac{|CF|}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{|CH| \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$,

所以 $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\pi - 2\alpha)} = \frac{\tan \alpha}{-\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2} = \frac{3}{2}$.



故选: C

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/856042213052010211>