

2024 届云南省昆明市官渡一中高三下学期 5 月月考数学试题试卷

注意事项

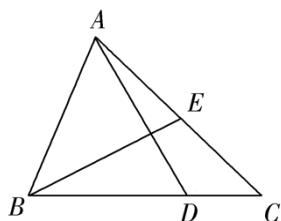
1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 z_1 在复平面内对应的点为 $(2, 3)$, $z_2 = -2 + i$, 则 $\frac{z_1}{z_2} =$ ()

- A. $-\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$ B. $-\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$ C. $-1 + \frac{8}{5}i$ D. $-1 - \frac{8}{5}i$

2. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, BC = 3, \angle ABC = 60^\circ, BD = 2DC, AE = EC$, 则 $\vec{AD} \cdot \vec{BE} =$ ()



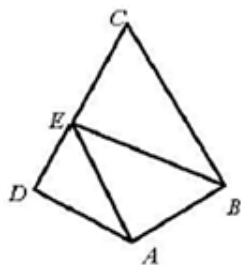
- A. 1 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $M(1, m) (m > 0)$, 则斜率 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

4. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC, AD \perp CD, \angle BAD = 120^\circ, AB = AD = 1$,

若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{21}{16}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{25}{16}$ D. 3

5. 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $m (m > 0)$ 个单位长度, 再将图像上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图像, 若 $g(x)$ 为奇函数, 则 m 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{2\pi}{9}$ C. $\frac{\pi}{18}$ D. $\frac{\pi}{24}$

6. 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A ， B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB = \frac{2\pi}{3}$ ，设线段 AB

的中点 M 在 l 上的投影为 N ，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

7. 命题 p ：存在实数 x_0 ，对任意实数 x ，使得 $\sin(x + x_0) = -\sin x$ 恒成立； q ： $\forall a > 0$ ， $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$ 为奇函数，

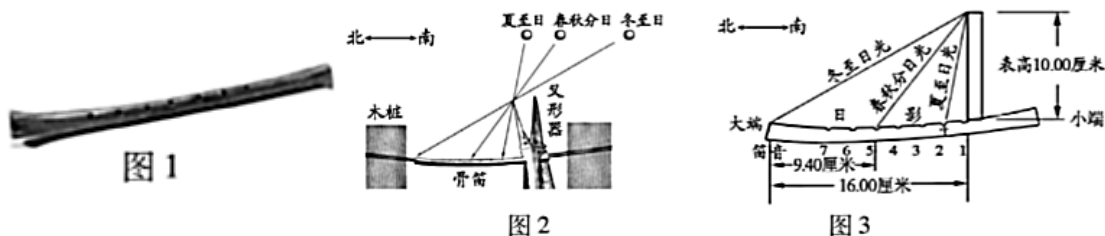
则下列命题是真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $(\neg p) \vee (\neg q)$ C. $p \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \wedge q$

8. 记单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_2 + a_4 = 10$ ， $a_2 a_3 a_4 = 64$ ，则 ()

- A. $S_{n+1} - S_n = 2^{n+1}$ B. $a_n = 2^n$ C. $S_n = 2^n - 1$ D. $S_n = 2^{n-1} - 1$

9. 上世纪末河南出土的以鹤的尺骨（翅骨）制成的“骨笛”（图 1），充分展示了我国古代高超的音律艺术及先进的数学水平，也印证了我国古代音律与历法的密切联系.图 2 为骨笛测量“春（秋）分”，“夏（冬）至”的示意图，图 3 是某骨笛的部分测量数据（骨笛的弯曲忽略不计），夏至（或冬至）日光（当日正午太阳光线）与春秋分日光（当日正午太阳光线）的夹角等于黄赤交角.



由历法理论知，黄赤交角近 1 万年持续减小，其正切值及对应的年代如下表：

黄赤交角	$23^{\circ}41'$	$23^{\circ}57'$	$24^{\circ}13'$	$24^{\circ}28'$	$24^{\circ}44'$
正切值	0.439	0.444	0.450	0.455	0.461
年代	公元元年	公元前 2000 年	公元前 4000 年	公元前 6000 年	公元前 8000 年

根据以上信息，通过计算黄赤交角，可估计该骨笛的大致年代是()

- A. 公元前 2000 年到公元元年 B. 公元前 4000 年到公元前 2000 年
C. 公元前 6000 年到公元前 4000 年 D. 早于公元前 6000 年

10. 已知 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_5 = 16$ ， $a_3 a_4 = -32$ ，则 $S_8 =$ ()

- A. - 21 B. - 24 C. 85 D. - 85

11. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$ 有下述四个结论: ()

- ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数;
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2; ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

12. 若向量 $\vec{a} = (1, 5), \vec{b} = (-2, 1)$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$ ()

- A. 30 B. 31 C. 32 D. 33

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 x, y 均为非负实数, 且 $x + y \leq 1$, 则 $4x^2 + 4y^2 + (1 - x - y)^2$ 的取值范围为_____.

14. 在 $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^8$ 的展开式中, x 的系数等于_____.

15. 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影为_____.

16. 连续掷两次骰子, 分别得到的点数作为点 P 的坐标, 则点 P 落在圆 $x^2 + y^2 = 19$ 内的概率为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集 A ;

(2) 若不等式 $f(x) \leq x^2 + 2x - m$ 对 $x \in A$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $(a - \sqrt{3}b)\sin A + b\sin B = c\sin C$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $\sin A \sin B = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$, $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + 2ax (a \in R)$, $g(x) = x^2 + 1 - 2f(x)$.

(1) 当 $a = -1$ 时,

① 求函数 $f(x)$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线方程;

② 比较 $f(m)$ 与 $f(\frac{1}{m})$ 的大小;

(2) 当 $a > 0$ 时, 若对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 且 $g(x)$ 有唯一零点, 证明: $a < \frac{3}{4}$.

20. (12 分) $\triangle ABC$ 中的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\sqrt{5}b = 4c$, $B = 2C$.

- (1) 求 $\cos B$;
- (2) 若 $c=5$, 点 D 为边 BC 上一点, 且 $BD=6$, 求 V_{ADC} 的面积.

21. (12 分) 设函数 $f(x)=|x-1|+|x-a|(a \in R)$.

- (1) 当 $a=4$ 时, 求不等式 $f(x)^3 \geq 5$ 的解集;
- (2) 若 $f(x) \geq 4$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (10 分) 设函数 $f(x)=a \ln x+x^2-(a+2)x$, 其中 $a \in R$.

(I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(II) 已知导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点, 证明: 当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x) > -e^2$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

求得复数 z_1 , 结合复数除法运算, 求得 $\frac{z_1}{z_2}$ 的值.

【详解】

易知 $z_1=2+3i$, 则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{-2+i}=\frac{(2+3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{(2+3i)(-2-i)}{5}=\frac{-1-8i}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i$.

故选: B

【点睛】

本小题主要考查复数及其坐标的对应, 考查复数的除法运算, 属于基础题.

2、C

【解析】

以 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 为基底, 将 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ 用基底表示, 根据向量数量积的运算律, 即可求解.

【详解】

$$BD = 2DC, \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA},$$

$$AE = EC, \therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2$$

$$= 1 - \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

故选:C.

【点睛】

本题考查向量的线性运算以及向量的基本定理，考查向量数量积运算，属于中档题.

3、C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, 与抛物线方程联立, 由 $\Delta > 0$ 得 $kb < 1$, 利用韦达定理结

合已知条件得 $b = \frac{2-k^2}{k}$, $m = \frac{2}{k}$, 代入上式即可求出 k 的取值范围.

【详解】

设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消去 y 得: $k^2x^2 + (2kb - 4)x + b^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (2kb - 4)^2 - 4k^2b^2 > 0,$$

$$\therefore kb < 1,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{b^2}{k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2b = \frac{4}{k},$$

Q 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$),

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = \frac{4}{k} = 2m,$$

$$\therefore b = \frac{2 - k^2}{k}, \quad m = \frac{2}{k},$$

Q $m > 0$,

$$\therefore k > 0,$$

把 $b = \frac{2-k^2}{k}$ 代入 $kb < 1$, 得 $2-k^2 < 1$,

$$\therefore k^2 > 1,$$

$$\therefore k > 1,$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系, 考查了韦达定理的应用, 属于中档题.

4、A

【解析】

分析: 由题意可得 $\triangle ABD$ 为等腰三角形, $\triangle BCD$ 为等边三角形, 把数量积 $\vec{AE} \cdot \vec{BE}$ 分拆, 设 $\vec{DE} = t\vec{DC} (0 \leq t \leq 1)$, 数量积转化为关于 t 的函数, 用函数可求得最小值.

详解: 连接 BD , 取 AD 中点为 O , 可知 $\triangle ABD$ 为等腰三角形, 而 $AB \perp BC, AD \perp CD$, 所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形,

$$BD = \sqrt{3}. \text{ 设 } \vec{DE} = t\vec{DC} (0 \leq t \leq 1)$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{BE} = (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot (\vec{BD} + \vec{DE}) = \vec{AD} \cdot \vec{BD} + \vec{DE} \cdot (\vec{AD} + \vec{BD}) + \vec{DE}^2 = \frac{3}{2} + \vec{BD} \cdot \vec{DE} + \vec{DE}^2$$

$$= 3t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

所以当 $t = \frac{1}{4}$ 时, 上式取最小值 $\frac{21}{16}$, 选 A.

点睛: 本题考查的是平面向量基本定理与向量的拆分, 需要选择合适的基底, 再把其它向量都用基底表示. 同时利用向量共线转化为函数求最值.

5、C

【解析】

根据三角函数的变换规则表示出 $g(x)$, 根据 $g(x)$ 是奇函数, 可得 m 的取值, 再求其最小值.

【详解】

解: 由题意知, 将函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $m (m > 0)$ 个单位长度, 得 $y = \sin\left[3\left(x - m\right) + \frac{\pi}{6}\right]$, 再将

$y = \sin\left[3x - 3m + \frac{\pi}{6}\right]$ 图像上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍 (纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图像,

$$\therefore g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - 3m + \frac{\pi}{6}\right),$$

因为 $g(x)$ 是奇函数,

所以 $-3m + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in Z$, 解得 $m = \frac{\pi}{18} - \frac{k\pi}{3}, k \in Z$,

因为 $m > 0$, 所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{18}$.

故选: C

【点睛】

本题考查三角函数的变换以及三角函数的性质, 属于基础题.

6、B

【解析】

试题分析: 设 A, B 在直线 l 上的投影分别是 A_1, B_1 , 则 $|AF| = |AA_1|$, $|BF| = |BB_1|$, 又 M 是 AB 中点, 所以

$|MN| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|)$, 则 $\frac{|MN|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AA_1| + |BB_1|}{|AB|} = \frac{|AF| + |BF|}{2|AB|}$, 在 $\triangle ABF$ 中

$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2|AF||BF|\cos\frac{2\pi}{3} = |AF|^2 + |BF|^2 + |AF||BF| = (|AF| + |BF|)^2 - |AF||BF| \geq (|AF| + |BF|)^2$$

$$- \left(\frac{|AF| + |BF|}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}(|AF| + |BF|)^2, \text{ 所以 } \frac{(|AF| + |BF|)^2}{|AB|^2} \leq \frac{4}{3}, \text{ 即 } \frac{|AF| + |BF|}{|AB|} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \frac{|MN|}{|AB|} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故选}$$

B.

考点: 抛物线的性质.

【名师点睛】

在直线与抛物线的位置关系问题中, 涉及到抛物线上的点到焦点的距离, 焦点弦长, 抛物线上的点到准线 (或与准线平行的直线) 的距离时, 常常考虑用抛物线的定义进行问题的转化. 象本题弦 AB 的中点 M 到准线的距离首先等于 A, B 两点到准线距离之和的一半, 然后转化为 A, B 两点到焦点 F 的距离, 从而与弦长 $|AB|$ 之间可通过余弦定理建立关系.

7、A

【解析】

分别判断命题 p 和 q 的真假性, 然后根据含有逻辑联结词命题的真假性判断出正确选项.

【详解】

对于命题 p , 由于 $\sin(x + \pi) = -\sin x$, 所以命题 p 为真命题. 对于命题 q , 由于 $a > 0$, 由 $\frac{a+x}{a-x} > 0$ 解得

$$-a < x < a, \text{ 且 } f(-x) = \ln \frac{a-x}{a+x} = \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{-1} = -\ln \frac{a+x}{a-x} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 是奇函数, 故 } q \text{ 为真命题. 所以 } p \wedge q$$

为真命题. $(\neg p) \vee (\neg q)$ 、 $p \wedge (\neg q)$ 、 $(\neg p) \wedge q$ 都是假命题.

故选: A

【点睛】

本小题主要考查诱导公式，考查函数的奇偶性，考查含有逻辑联结词命题真假性的判断，属于基础题.

8、C

【解析】

先利用等比数列的性质得到 a_3 的值，再根据 a_2, a_4 的方程组可得 a_2, a_4 的值，从而得到数列的公比，进而得到数列的通项和前 n 项和，根据后两个公式可得正确的选项.

【详解】

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_3^2 = a_2 a_4$ ，故 $a_3^3 = 64$ 即 $a_3 = 4$ ，

由 $\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_2 a_4 = 16 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2 = 8 \\ a_4 = 2 \end{cases}$ ，因为 $\{a_n\}$ 为递增数列，故 $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ 符合.

此时 $q^2 = 4$ ，所以 $q = 2$ 或 $q = -2$ （舍，因为 $\{a_n\}$ 为递增数列）.

故 $a_n = a_3 q^{n-3} = 4 \times 2^{n-3} = 2^{n-1}$ ， $S_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1$.

故选 C.

【点睛】

一般地，如果 $\{a_n\}$ 为等比数列， S_n 为其前 n 项和，则有性质：

(1) 若 $m, n, p, q \in N^*, m + n = p + q$ ，则 $a_m a_n = a_p a_q$ ；

(2) 公比 $q \neq 1$ 时，则有 $S_n = A + Bq^n$ ，其中 A, B 为常数且 $A + B = 0$ ；

(3) $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 为等比数列（ $S_n \neq 0$ ）且公比为 q^n .

9、D

【解析】

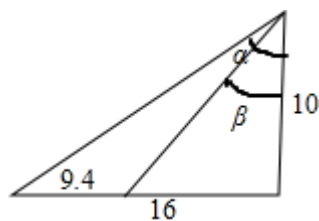
先理解题意，然后根据题意建立平面几何图形，在利用三角函数的知识计算出冬至日光与春秋分日光的夹角，即黄赤交角，即可得到正确选项.

【详解】

解：由题意，可设冬至日光与垂直线夹角为 α ，春秋分日光与垂直线夹角为 β ，

则 $\alpha - \beta$ 即为冬至日光与春秋分日光的夹角，即黄赤交角，

将图3近似画出如下平面几何图形：



$$\text{则 } \tan \alpha = \frac{16}{10} = 1.6, \quad \tan \beta = \frac{16-9.4}{10} = 0.66,$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1.6 - 0.66}{1 + 1.6 \times 0.66} \approx 0.457.$$

$$\text{Q } 0.455 < 0.457 < 0.461,$$

$\therefore$ 估计该骨笛的大致年代早于公元前 6000 年.

故选: D.

【点睛】

本题考查利用三角函数解决实际问题的能力, 运用了两角和与差的正切公式, 考查了转化思想, 数学建模思想, 以及数学运算能力, 属中档题.

10、D

【解析】

由等比数列的性质求得 $a_1 q^4 = 16$, $a_1^2 q^5 = -32$, 通过解该方程求得它们的值, 求首项和公比, 根据等比数列的前 n 项和公式解答即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\because a_5 = 16, \quad a_3 a_4 = -32,$$

$$\therefore a_1 q^4 = 16, \quad a_1^2 q^5 = -32,$$

$$\therefore q = -2, \quad \text{则 } a_1 = 1,$$

$$\text{则 } S_8 = \frac{1 \times [1 - (-2)^8]}{1 + 2} = -85,$$

故选: D.

【点睛】

本题主要考查等比数列的前 n 项和, 根据等比数列建立条件关系求出公比是解决本题的关键, 属于基础题.

11、C

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性、单调性、最值和零点对四个结论逐一分析, 由此得出正确结论的编号.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/856111220052010211>