

2023-2024 学年广西桂平市高三月考（三）数学试题

注意事项：

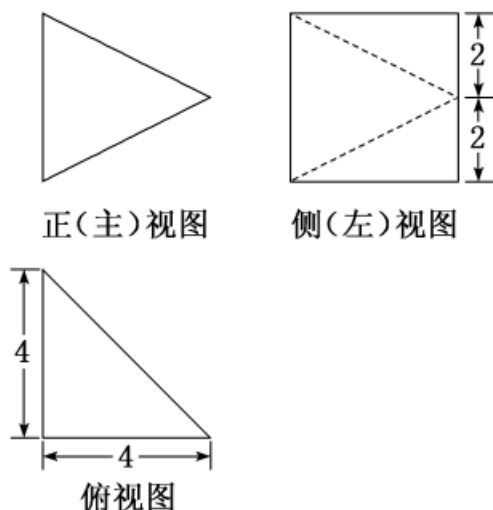
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z_1=3+4i, z_2=a+i$, 且 $z_1 \bar{z}_2$ 是实数, 则实数 a 等于()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$

2. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是()



- A. $\frac{64}{3}$ B. 64 C. $\frac{32}{3}$ D. 32

3. 已知不同直线 l, m 与不同平面 α, β , 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 则下列说法中正确的是()

- A. 若 $\alpha // \beta$, 则 $l // m$ B. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp m$
- C. 若 $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$

4. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$, 若 $z = -3x+2y$ 的最大值为 n , 则 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中 x^2 项的系数为()

- A. 60 B. 80 C. 90 D. 120

5. 设复数 z 满足 $(1+i)z = 1-7i$, 则 z 在复平面内的对应点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $|\vec{b}| = 2, |\vec{a} + \vec{b}| = 1, \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 且 $\lambda + 2\mu = 1$, 若对每一个确定的向量 $\vec{a}$, 记 $|\vec{c}|$

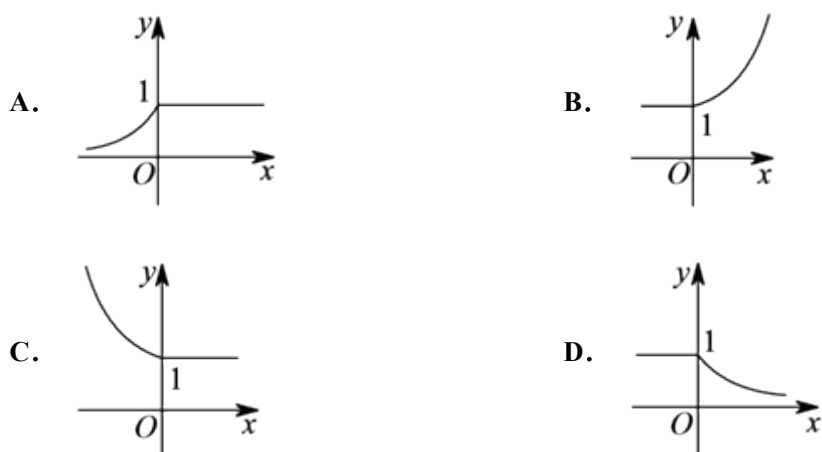
的最小值为 m ，则当 $\frac{1}{a}$ 变化时， m 的最大值为（ ）

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

7. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点， O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$ ，则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. $\sqrt{5}$

8. 定义运算 $a \oplus b = \begin{cases} a(a \leq b) \\ b(a > b) \end{cases}$ ，则函数 $f(x) = 1 \oplus 2^x$ 的图象是（ ）.



9. 已知 i 为虚数单位，则 $\frac{2+3i}{(1-2i)i} =$ ()

- A. $\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$ B. $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

10. 若 $a \in [1, 6]$ ，则函数 $y = \frac{x^2 + a}{x}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 内单调递增的概率是 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

11. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$ ， i 是虚数单位，则下列结论正确的是

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. z 的共轭复数为 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
C. z 的实部与虚部之和为 1 D. z 在复平面内的对应点位于第一象限

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_3 a_n + 1 = \log_3 a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_3 + a_5 + a_7)$ 的值是()

- A. 5 B. -3 C. 4 D. $\frac{9}{91}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，斜率为 2 的直线 l 与 C 的交点为 A, B ，若 $|AF| + |BF| = 5$ ，则直线 l 的方程为_____.

14. 小李参加有关“学习强国”的答题活动，要从 4 道题中随机抽取 2 道作答，小李会其中的三道题，则抽到的 2 道题小李都会的概率为_____.

15. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$ ， $\vec{b} = (-1, k)$ ， $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

16. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ，

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $0 < m < \frac{4}{e^2}$ 时，判断函数 $g(x) = \frac{x^2}{e^x} - m$ ，($x \geq 0$) 有几个零点，并证明你的结论；

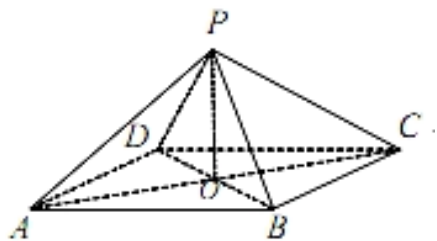
(3) 设函数 $h(x) = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{x} + f(x) \right] - \frac{1}{2} \left| x - \frac{1}{x} - f(x) \right| - cx^2$ ，若函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数，求实数 c 的取值范围.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F_1 ，过点 F_1 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\sqrt{2}$ ，且 F_1 与短轴两端点的连线相互垂直.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 上存在两点 M, N ，椭圆 C 上存在两个点 P, Q 满足： M, N, F_1 三点共线， P, Q, F_1 三点共线，且 $\vec{PQ} \cdot \vec{MN} = 0$ ，求四边形 $PMQN$ 面积的取值范围.

19. (12 分) 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面正方形的对角线 AC, BD 交于点 O 且 $OP = \frac{1}{2} AB$.



(1) 求直线 BP 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(2) 求锐二面角 $B-PD-C$ 的大小.

20. (12 分) 设不等式 $-2 < |x-1| - |x+2| < 0$ 的解集为 M , $a, b \in M$.

(1) 证明: $\left| \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b \right| < \frac{1}{4}$;

(2) 比较 $|1-4ab|$ 与 $2|a-b|$ 的大小, 并说明理由.

21. (12 分) 对于很多人来说, 提前消费的认识首先是源于信用卡, 在那个工资不高的年代, 信用卡绝对是神器, 稍微大件的东西都是可以选择用信用卡来买, 甚至于分期买, 然后慢慢还! 现在银行贷款也是很风靡的, 从房贷到车贷到一般的现金贷. 信用卡“忽如一夜春风来”, 遍布了各大小城市的大街小巷. 为了解信用卡在 A 市的使用情况, 某调查机构借助网络进行了问卷调查, 并从参与调查的网友中随机抽取了 100 人进行抽样分析, 得到如下 2×2 列联表 (单位: 人)

	经常使用信用卡	偶尔或不用信用卡	合计
40 岁及以下	15	35	50
40 岁以上	20	30	50
合计	35	65	100

(1) 根据以上数据, 能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为 A 市使用信用卡情况与年龄有关?

(2) ①现从所抽取的 40 岁及以下的网民中, 按“经常使用”与“偶尔或不用”这两种类型进行分层抽样抽取 10 人, 然后, 再从这 10 人中随机选出 4 人赠送积分, 求选出的 4 人中至少有 3 人偶尔或不用信用卡的概率;

②将频率视为概率, 从 A 市所有参与调查的 40 岁以上的网民中随机抽取 3 人赠送礼品, 记其中经常使用信用卡的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列、数学期望和方差.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

参考数据:

$P(K^2 \dots k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 和通项 a_n 满足 $2S_n + a_n = 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 已知数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 3a_1$, $b_{n+1} = b_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

分析：计算 $\bar{z}_2 = a - i$ ，由 $z_1 \bar{z}_2 = 3a + 4 + (4a - 3)i$ ，是实数得 $4a - 3 = 0$ ，从而得解。

详解：复数 $z_1 = 3 + 4i, z_2 = a + i$,

$$\bar{z}_2 = a - i.$$

所以 $z_1 \bar{z}_2 = (3 + 4i)(a - i) = 3a + 4 + (4a - 3)i$ ，是实数，

$$\text{所以 } 4a - 3 = 0, \text{ 即 } a = \frac{3}{4}.$$

故选 A.

点睛：本题主要考查了复数共轭的概念，属于基础题.

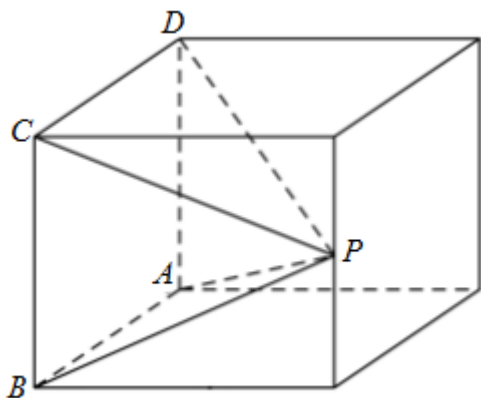
2、A

【解析】

根据三视图，还原空间几何体，即可得该几何体的体积.

【详解】

由该几何体的三视图，还原空间几何体如下图所示：



可知该几何体是底面在左侧的四棱锥，其底面是边长为 4 的正方形，高为 4，

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 4 = \frac{64}{3}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了三视图的简单应用，由三视图还原空间几何体，棱锥体积的求法，属于基础题.

3、C

【解析】

根据空间中平行关系、垂直关系的相关判定和性质可依次判断各个选项得到结果.

【详解】

对于 A，若 $\alpha // \beta$ ，则 l, m 可能为平行或异面直线，A 错误；

对于 B，若 $\alpha \perp \beta$ ，则 l, m 可能为平行、相交或异面直线，B 错误；

对于 C，若 $l \perp \beta$ ，且 $l \subset \alpha$ ，由面面垂直的判定定理可知 $\alpha \perp \beta$ ，C 正确；

对于 D，若 $\alpha \perp \beta$ ，只有当 m 垂直于 α, β 的交线时才有 $m \perp \alpha$ ，D 错误.

故选：C.

【点睛】

本题考查空间中线面关系、面面关系相关命题的辨析，关键是熟练掌握空间中的平行关系与垂直关系的相关命题.

4、B

【解析】

画出可行域和目标函数，根据平移得到 $n = 5$ ，再利用二项式定理计算得到答案.

【详解】

如图所示：画出可行域和目标函数，

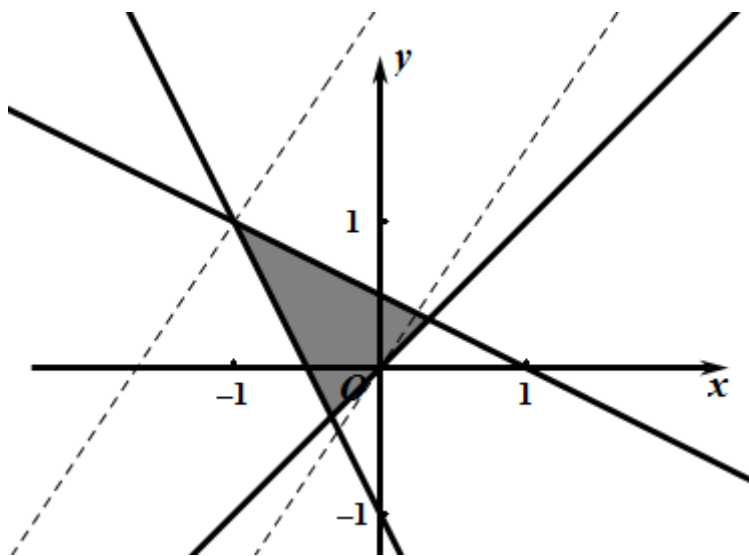
$$z = -3x + 2y, \text{ 即 } y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}, \text{ 故 } z \text{ 表示直线与 } y \text{ 截距的 2 倍,}$$

根据图像知：当 $x = -1, y = 1$ 时， $z = -3x + 2y$ 的最大值为 5，故 $n = 5$ 。

$$\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \text{ 展开式的通项为： } T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{5-\frac{3}{2}r},$$

取 $r = 2$ 得到 x^2 项的系数为： $C_5^2 \cdot 2^{5-2} \cdot (-1)^2 = 80$ 。

故选：B。



【点睛】

本题考查了线性规划求最值，二项式定理，意在考查学生的计算能力和综合应用能力。

5、C

【解析】

化简得到 $z = -3 - 4i$ ，得到答案。

【详解】

$$(1+i)z = 1-7i, \text{ 故 } z = \frac{1-7i}{1+i} = \frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i, \text{ 对应点在第三象限.}$$

故选：C。

【点睛】

本题考查了复数的化简和对应象限，意在考查学生的计算能力。

6、B

【解析】

根据题意,建立平面直角坐标系.令 $\vec{OP} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$. E 为 OB 中点.由 $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 1$ 即可求得 P 点的轨迹方程.将 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 变形,结合 $\lambda + 2\mu = 1$ 及平面向量基本定理可知 P, C, E 三点共线.由圆切线的性质可知 $|\vec{c}|$ 的最小值 m

即为 O 到直线 PE 的距离最小值,且当 PE 与圆 M 相切时, m 有最大值.利用圆的切线性质及点到直线距离公式即可求得直线方程,进而求得原点到直线的距离,即为 m 的最大值.

【详解】

根据题意, $|\vec{b}| = 2$, 设 $\vec{OP} = \vec{a} = (x, y)$, $\vec{OB} = \vec{b} = (2, 0)$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $E(1, 0)$

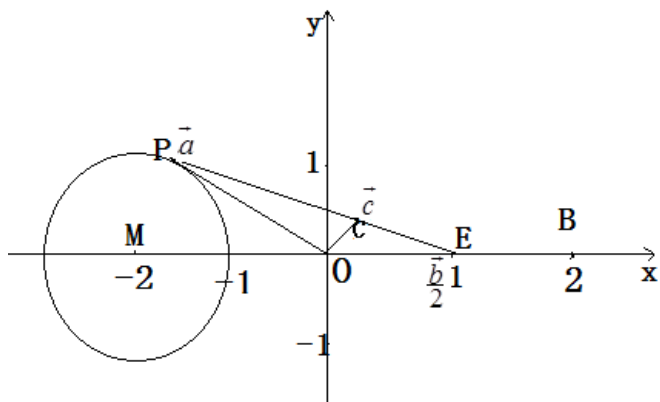
$$\text{则 } \vec{OE} = \frac{\vec{b}}{2}$$

$$\text{由 } |\vec{a} + \vec{b}| = 1 \text{ 代入可得 } \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 1$$

$$\text{即 } P \text{ 点的轨迹方程为 } (x+2)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{又因为 } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \text{ 变形可得 } \vec{c} = \lambda \vec{a} + 2\mu \left(\frac{\vec{b}}{2} \right), \text{ 即 } \vec{OC} = \lambda \vec{OP} + 2\mu \vec{OE}, \text{ 且 } \lambda + 2\mu = 1$$

所以由平面向量基本定理可知 P, C, E 三点共线,如下图所示:



所以 $|\vec{c}|$ 的最小值 m 即为 O 到直线 PE 的距离最小值

根据圆的切线性质可知,当 PE 与圆 M 相切时, m 有最大值

设切线 PE 的方程为 $y = k(x-1)$, 化简可得 $kx - y - k = 0$

$$\text{由切线性质及点 } M \text{ 到直线距离公式可得 } \frac{|-2k - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, \text{ 化简可得 } 8k^2 = 1$$

$$\text{即 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{所以切线方程为 } \frac{\sqrt{2}}{4}x - y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{4}x + y - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

所以当 a 变化时, O 到直线 PE 的最大值为 $m = \frac{\left| -\frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + (\pm 1)^2}} = \frac{1}{3}$

即 m 的最大值为 $\frac{1}{3}$

故选:B

【点睛】

本题考查了平面向量的坐标应用,平面向量基本定理的应用,圆的轨迹方程问题,圆的切线性质及点到直线距离公式的应用,综合性强,属于难题.

7、A

【解析】

准确画图,由图形对称性得出P点坐标,代入圆的方程得到c与a关系,可求双曲线的离心率.

【详解】

设 PQ 与 x 轴交于点 A ,由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴,

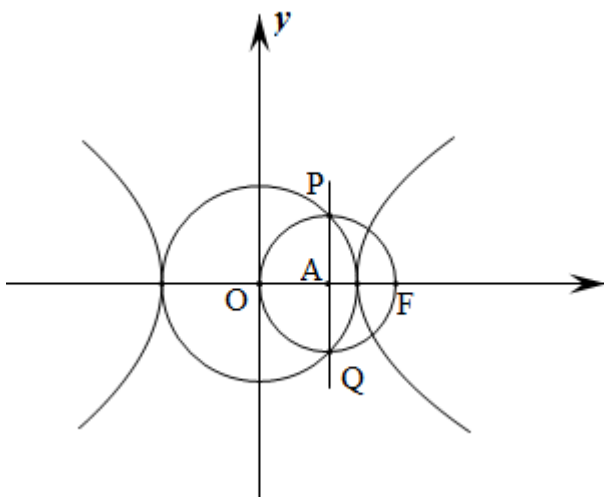
又 $Q|PQ|=|OF|=c$, $\therefore |PA|=\frac{c}{2}$, $\therefore PA$ 为以 OF 为直径的圆的半径,

$\therefore A$ 为圆心 $|OA|=\frac{c}{2}$.

$\therefore P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$, 又 P 点在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上,

$\therefore \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = a^2$, 即 $\frac{c^2}{2} = a^2$, $\therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2$.

$\therefore e = \sqrt{2}$, 故选A.



【点睛】

本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来。

8、A

【解析】

由已知新运算 $a \oplus b$ 的意义就是取得 a, b 中的最小值，

$$\text{因此函数 } f(x) = 1 \oplus 2^x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0 \end{cases},$$

只有选项 A 中的图象符合要求，故选 A.

9、A

【解析】

根据复数乘除运算法则，即可求解.

【详解】

$$\frac{2+3i}{(1-2i)i} = \frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查复数代数运算，属于基础题.

10、B

【解析】 Q 函数 $y = \frac{x^2+a}{x}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 内单调递增， $\therefore y' = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2-a}{x^2} \geq 0$ ，在 $[2, +\infty)$ 恒成立， $\therefore a \leq x^2$

在 $[2, +\infty)$ 恒成立， $\therefore a \leq 4$ ，Q $a \in [1, 6]$ ， $\therefore a \in [1, 4]$ ， $\therefore$ 函数 $y = \frac{x^2+a}{x}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 内单调递增的概率是

$$\frac{4-1}{6-1} = \frac{3}{5}, \text{ 故选 B.}$$

11、D

【解析】

利用复数的四则运算，求得 $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，在根据复数的模，复数与共轭复数的概念等即可得到结论.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/856113120040010232>