2024届辽宁省沈阳市第三十一中学高三下学期开学考试（普通班）数学试题试卷

请考生注意：

1．请用2B铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用0．5毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{3},\ 0)$，其相邻一条对称轴方程为 $x=\frac{7\pi}{12}$，该对称轴处所对应的函数值为 -1，为了得到 $g(x)=\cos 2x$ 的图象，则只要将 $f(x)$ 的图象(　　)

A．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B．向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　D．向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

2．已知复数 $z=(1-a)+(a^2-1)\mathrm{i}$（i为虚数单位，$a>1$），则 z 在复平面内对应的点所在的象限为（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．如图，这是某校高三年级甲、乙两班在上学期的5次数学测试的班级平均分的茎叶图，则下列说法不正确的是（　　）

甲班		乙班	
	9	5	8
7 3 1	10	1	3
2	11	3	

A．甲班的数学成绩平均分的平均水平高于乙班

B．甲班的数学成绩的平均分比乙班稳定

C．甲班的数学成绩平均分的中位数高于乙班

D．甲、乙两班这5次数学测试的总平均分是103

4．博览会安排了分别标有序号为“1号”“2号”“3号”的三辆车，等可能随机顺序前往酒店接嘉宾．某嘉宾突发奇想，设计两种乘车方案．方案一：不乘坐第一辆车，若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号，就乘坐此车，否则乘坐第三辆车；方案二：直接乘坐第一辆车．记方案一与方案二坐到“3号”车的概率分别为 P_1，P_2，则（　　）

A．$P_1 \cdot P_2=\frac{1}{4}$　　B．$P_1=P_2=\frac{1}{3}$　　C．$P_1+P_2=\frac{5}{6}$　　D．$P_1<P_2$

5．已知 α,β 是空间中两个不同的平面，m,n 是空间中两条不同的直线，则下列说法正确的是（　　）

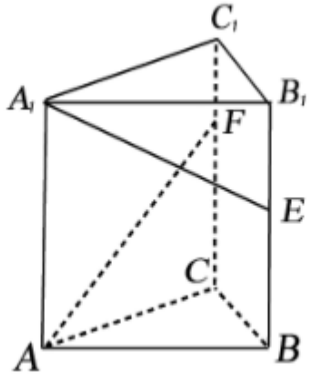
A．若 $m\subset\alpha,n\subset\beta$，且 $\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$

B．若 $m\subset\alpha,n\subset\alpha$，且 $m//\beta,n//\beta$，则 $\alpha//\beta$

C．若$m\perp\alpha,n//\beta$，且$\alpha\perp\beta$，则$m\perp n$

D．若$m\perp\alpha,n//\beta$，且$\alpha//\beta$，则$m\perp n$

6．如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面为正三角形，侧棱垂直底面，$AB=4,\ AA_1=8$.若E，F分别是棱BB_1，CC上的点，且$BE=B_1E$，$C_1F=\frac{1}{4}CC_1$，则异面直线A_1E与AF所成角的余弦值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{26}}{13}$　　C．$\frac{\sqrt{13}}{13}$　　D．$\frac{\sqrt{13}}{10}$

7．已知复数$z=\frac{(3i-1)(1-i)}{i^{2019}}$（i为虚数单位），则下列说法正确的是（　　）

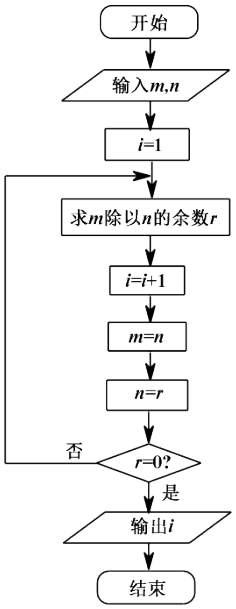
A．z的虚部为4　　B．复数z在复平面内对应的点位于第三象限

C．z的共轭复数$\bar{z}=4-2i$　　D．$|z|=2\sqrt{5}$

8．已知函数$f(x)=\ln(x+1)-ax$，若曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=2x$，则实数a的取值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

9．执行如图所示的程序框图，若输入$m=2020$，$n=520$，则输出的$i=$（　　）



A．4 **B．5** **C．6** **D．7**

10．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AD=\sqrt{2}$，$AA_1=\sqrt{3}$，则直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为（　）

A． $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B．** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C．** $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **D．** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

11．若实数 x,y 满足的约束条件 $\begin{cases} y\geq 0 \\ x+y-3\leq 0 \\ 2x-y\geq 0 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的取值范围是（　　）

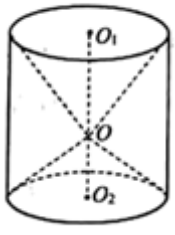
A． $[4,+\infty)$ **B．** $[0,6]$ **C．** $[0,4]$ **D．** $[6,+\infty)$

12．函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\ln(x+1)$ 的定义域为（　）

A． $(2,+\infty)$ **B．** $(-1,2)\cup(2,+\infty)$ **C．** $(-1,2)$ **D．** $(-1,2]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．如图，在体积为 V 的圆柱 O_1O_2 中，以线段 O_1O_2 上的点 O 为项点，上下底面为底面的两个圆锥的体积分别为 V_1，V_2，则 $\frac{V_1+V_2}{V}$ 的值是_____.



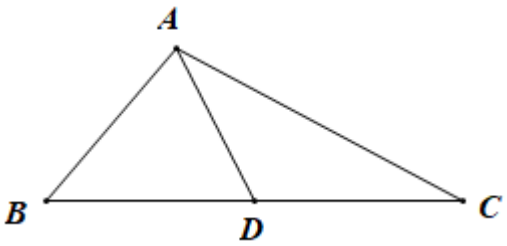
14．已知函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}-1$，则关于 x 的不等式 $f(2x)+f(x+1)>-2$ 的解集为_____.

15．若曲线 $f(x)=ae^{x}-\ln x$（其中常数 $a\neq 0$）在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 1，则 $a=$_____.

16．抛物线 $y^{2}=4x$ 上到其焦点的距离为 1 的点的个数为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,\ B,\ C$ 的对边分别为 $a,\ b,\ c$，且满足 $a\sin B+b\cos A=c$，线段 BC 的中点为 D.



（Ⅰ）求角 B 的大小；

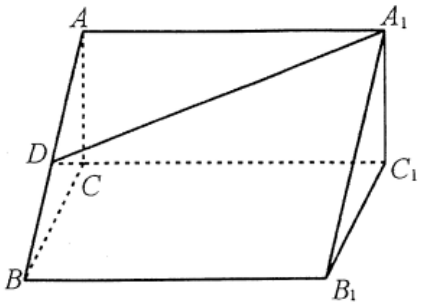
（Ⅱ）已知 $\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\angle ADB$ 的大小.

18．（12 分）已知 a,b,c 均为正实数，函数 $f\left(x\right)=\left|x+\dfrac{1}{a^{2}}\right|+\left|x-\dfrac{1}{b^{2}}\right|+\dfrac{1}{4c^{2}}$ 的最小值为 1.证明：

（1）$a^{2}+b^{2}+4c^{2}\geq 9$；

（2）$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{2bc}+\dfrac{1}{2ac}\leq 1$.

19．（12 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_{1}B_{1}C_{1}$ 中，$AC\perp BC$，$AB\perp BB_{1}$，$AC=BC=BB_{1}$，D 为 AB 的中点，且 $CD\perp DA_{1}$.



（1）求证：$BB_{1}\perp$ 平面 ABC；

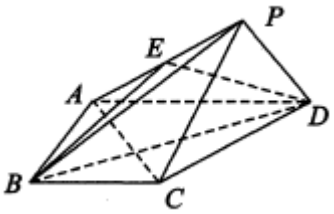
（2）求锐二面角 $C-DA_{1}-C_{1}$ 的余弦值.

20．（12 分）已知函数 $f(x)=e^{-\frac{x}{1-x}}$，

（1）证明：$f(x)$在区间$(0,1)$单调递减；

（2）证明：对任意的$x\in(0,1)$有$e^{-\frac{x}{1-x}}<1-x<e^{-x}$.

21.（12分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是直角梯形，$AD//BC$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC=2$，ΔPCD是正三角形，$PC\perp AC$，E是PA的中点.



（1）证明：$AC\perp BE$；

（2）求直线BP与平面BDE所成角的正弦值.

22.（10分）已知函数$f(x)=\ln(ax)-a,(a>0)$.

（1）若函数$h(x)=e^{x}f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，求实数a的值；

（2）定义：若直线$l:y=kx+b$与曲线$C_1:f_1(x,y)=0$、$C_2:f_2(x,y)=0$都相切，我们称直线l为曲线C_1、C_2的公切线，证明：曲线$f(x)=\ln(ax)-a,(a>0)$与$g(x)=ae^{x},(a>0)$总存在公切线.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由函数的图象的顶点坐标求出A，由周期求出ω，由五点法作图求出φ的值，可得$f\left(x\right)$的解析式，再根据函数$y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$的图象变换规律，诱导公式，得出结论.

【详解】

根据已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$

(其中 $A>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$，

可得 $A=1$，$\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$，

解得：$\omega=2$.

再根据五点法作图可得 $2\cdot\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$，

可得：$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

可得函数解析式为：$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$

故把 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

可得 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos2x$ 的图象，

故选 ***B***.

【点睛】

本题主要考查由函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的部分图象求解析式，由函数的图象的顶点坐标求出 *A*，由周期求出 ω，由五点法作图求出 φ 的值，函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图象变换规律，诱导公式的应用，属于中档题.

2、B

【解析】

分别比较复数 *z* 的实部、虚部与 0 的大小关系，可判断出 *z* 在复平面内对应的点所在的象限.

【详解】

因为 $a>1$ 时，所以 $1-a<0$，$a^2-1>0$，所以复数 *z* 在复平面内对应的点位于第二象限.

故选：B.

【点睛】

本题考查复数的几何意义，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

3、D

【解析】

计算两班的平均值，中位数，方差得到 ABC 正确，两班人数不知道，所以两班的总平均分无法计算，D 错误，得到答案.

【详解】

由题意可得甲班的平均分是 104，中位数是 103，方差是 26.4；

乙班的平均分是 102，中位数是 101，方差是 37.6，则 A，B，C 正确.

因为甲、乙两班的人数不知道，所以两班的总平均分无法计算，故 D 错误.

故选：D.

【点睛】

本题考查了茎叶图，平均值，中位数，方差，意在考查学生的计算能力和应用能力.

4、C

【解析】

将三辆车的出车可能顺序一一列出，找出符合条件的即可.

【详解】

三辆车的出车顺序可能为：123、132、213、231、312、321

方案一坐车可能：132、213、231，所以，$P_1=\frac{3}{6}$；

方案二坐车可能：312、321，所以，$P_1=\frac{2}{6}$；

所以 $P_1+P_2=\frac{5}{6}$

故选 C.

【点睛】

本题考查了古典概型的概率的求法，常用列举法得到各种情况下基本事件的个数，属于基础题.

5、D

【解析】

利用线面平行和垂直的判定定理和性质定理,对选项做出判断，举出反例排除.

【详解】

解：对于 A，当 $m\subset\alpha,n\subset\beta$，且 $\alpha\perp\beta$，则 m 与 n 的位置关系不定，故错；

对于 B，当 $m//n$ 时，不能判定 $\alpha//\beta$，故错；

对于 C，若 $m\perp\alpha,n//\beta$，且 $\alpha\perp\beta$，则 m 与 n 的位置关系不定，故错；

对于 D，由 $m\perp\alpha,\alpha//\beta$ 可得 $m\perp\beta$，又 $n//\beta$，则 $m\perp n$ 故正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查空间线面位置关系.判断线面位置位置关系利用好线面平行和垂直的判定定理和性质定理. 一般可借助正方体模型，以正方体为主线直观感知并准确判断.

6、B

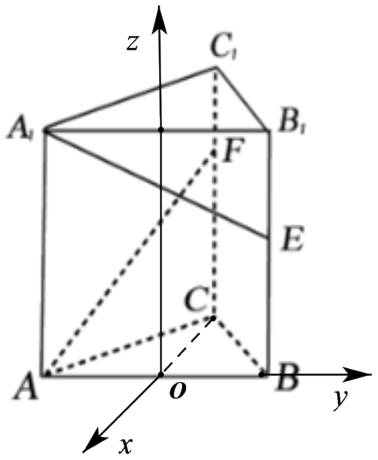
【解析】

建立空间直角坐标系，利用向量法计算出异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值.

【详解】

依题意三棱柱底面是正三角形且侧棱垂直于底面.设 AB 的中点为 O，建立空间直角坐标系如下图所示.所以 $A_1\left(0,-2,8\right),E\left(0,2,4\right),A\left(0,-2,0\right),F\left(-2\sqrt{3},0,6\right)$，所以 $\overrightarrow{A_1E}=\left(0,4,-4\right),\overrightarrow{AF}=\left(-2\sqrt{3},2,6\right)$.所以异面直线 A_1E 与 AF 所成角的余弦值为 $\left|\dfrac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{AF}}{\left|\overrightarrow{A_1E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AF}\right|}\right|=\left|\dfrac{8-24}{4\sqrt{2}\times2\sqrt{13}}\right|=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

故选：B



【点睛】

本小题主要考查异面直线所成的角的求法，属于中档题.

7、D

【解析】

利用 i 的周期性先将复数 z 化简为 $z=-4+2\mathrm{i}$ 即可得到答案.

【详解】

因为 $\mathrm{i}^2=-1$，$i^4=1$，$\mathrm{i}^5=\mathrm{i}$，所以 i 的周期为 4，故 $z=\dfrac{4\mathrm{i}+2}{\mathrm{i}^{4\times504+3}}=\dfrac{4\mathrm{i}+2}{\mathrm{i}^3}=\dfrac{4\mathrm{i}+2}{-\mathrm{i}}=-4+2\mathrm{i}$，

故 z 的虚部为 2，A 错误；z 在复平面内对应的点为 $(-4,2)$，在第二象限，B 错误；z 的共轭复数为 $\overline{z}=-4-2i$，C 错误；$|z|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$，D 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的四则运算，涉及到复数的虚部、共轭复数、复数的几何意义、复数的模等知识，是一道基础题.

8、B

【解析】

求出函数的导数，利用切线方程通过$f'(0)$，求解即可；

【详解】

$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，

因为$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$，曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=2x$，

可得$1-a=2$，解得$a=-1$，

故选：B.

【点睛】

本题考查函数的导数的几何意义，切线方程的求法，考查计算能力.

9、C

【解析】

根据程序框图程序运算即可得.

【详解】

依程序运算可得：

$r=460$，$i=2$，$m=520$，$n=460$；$r=60$，$i=3$，$m=460$，$n=60$；$r=40$，$i=4$，$m=60$，$n=40$；

$r=20$，$i=5$，$m=40$，$n=20$；$r=0$，$i=6$，

故选：C

【点睛】

本题主要考查了程序框图的计算，解题的关键是理解程序框图运行的过程.

10、C

【解析】

在长方体中$AB//C_1D_1$， 得DD_1与平面ABC_1交于D_1，过D做$DO\perp AD_1$于O，可证$DO\perp$平面ABC_1D_1，可得$\angle DD_1A$为所求解的角，解$Rt\Delta ADD_1$，即可求出结论.

【详解】

在长方体中$AB//C_1D_1$，平面ABC_1即为平面ABC_1D_1，

过D做$DO\perp AD_1$于O，Q$AB\perp$平面AA_1D_1D，

$DO\subset$平面$AA_1D_1D,\therefore AB\perp DO,AB\cap AD_1=D$，

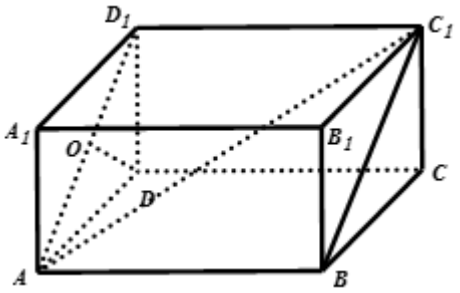
$\therefore DO \perp$ 平面 ABC_1D_1，$\therefore \angle DD_1A$ 为 DD_1 与平面 ABC_1 所成角，

在 $Rt\Delta ADD_1, DD_1 = AA_1 = \sqrt{3}, AD = \sqrt{2}, \therefore AD_1 = \sqrt{5}$，

$\therefore \cos\angle DD_1A = \dfrac{DD_1}{AD_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

$\therefore$ 直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

故选:C.



【点睛】

本题考查直线与平面所成的角，定义法求空间角要体现“做”“证”“算”，三步骤缺一不可，属于基础题.

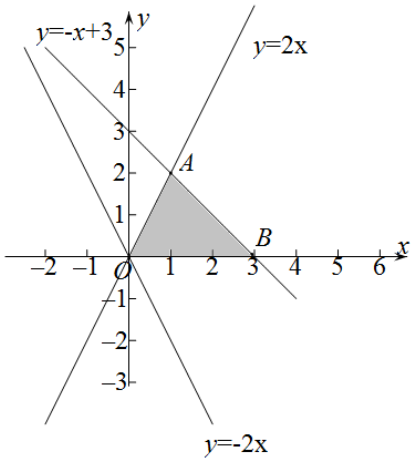
11、B

【解析】

根据所给不等式组，画出不等式表示的可行域，将目标函数化为直线方程，平移后即可确定取值范围.

【详解】

实数 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$，画出可行域如下图所示：



将线性目标函数 $z = 2x + y$ 化为 $y = -2x + z$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/856241113224010210