

2025 届高三年级第二学期数学测试试题

(2月22日)

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分）

1. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = x\}$, 集合 $N = \{(x, y) | 2x - y = 1 \text{ 且 } x + 4y = 5\}$, $p \in M$ 是 $p \in N$ 的 () 条件.

- A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充要 D. 既不充分又不必要

2. 已知 $2i-3$ 是关于 x 的方程 $2x^2 + px + q = 0 (p, q \in \mathbf{R})$ 一个根, 则 $q =$ ()

- A. -10 B. 26 C. -26 D. 13

3. 根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 2.974$. 已知 $P(\chi^2 \geq 3.841) = 0.05$, 依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 以下结论正确的是 ()

- A. 变量 x 与 y 独立
- B. 变量 x 与 y 独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.05
- C. 变量 x 与 y 不独立
- D. 变量 x 与 y 不独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.05

4. 在 $\triangle ABC$ 中 $\sin A = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{4}{5}$ 则 $\cos C$ 的值为 ()

- A. $-\frac{16}{65}$ B. $\frac{56}{65}$ C. $\frac{16}{65}$ 或 $-\frac{56}{65}$ D. $-\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$

5. 已知 $\log_{|a|} \frac{1}{2} < 1, \left(\frac{1}{2}\right)^a < 1, a^{\frac{1}{3}} < 1$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $-1 < a < -\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2} < a < 0$
C. $0 < a < \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} < a < 1$

6. 在孟德尔豌豆试验中，子二代基因型为 DD, Dd, dd ，其中 D 为显性基因， d 为隐性基因，且这三种基因型的比为 $1:2:1$ ，如果在子二代中任意选取 2 株豌豆进行杂交试验，那么子三代中基因型为 dd 的概率为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{16}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

7. 已知 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+2}{4n+5}$, 设点 A 是直线 BC 外一点, 点 P 是直

线 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{a_2 + a_6}{b_3} \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}$, 则实数 λ 的值为 ()

- A. $\frac{8}{25}$ B. $-\frac{9}{25}$ C. $\frac{2}{25}$ D. $-\frac{21}{25}$

8. 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图象重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 0

二、多选题 (本大题共 3 小题, 共 15 分)

9. 平面 α 垂直于平面 β , 且 $\alpha \cap \beta = l$, 下列命题正确的是 ()

- A. 平面 α 内一定存在直线平行于平面 β
 B. 平面 α 内已知直线必垂直于平面 β 内无数条直线
 C. 平面 α 内任一条直线必垂直于平面 β
 D. 过平面 α 内任意一点作交线 l 的垂线, 则此垂线必垂直于平面 β

10. 一动圆 M 与 $C_1: x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 - 6x = 0$ 都相切, 则动圆圆心 M 的轨迹方程可能情形是 ()

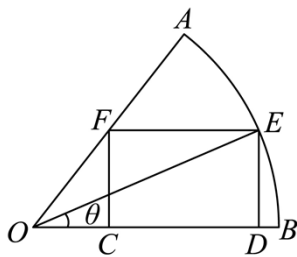
- A. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x \leq -1)$ B. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x > 1)$
 C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 (x \leq -2)$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 (x \geq 2)$

11. 扇形 AOB 的中心角为 60° , 所在圆半径为 $\sqrt{3}$, 它按如图 I、图 II 两种方式有内接矩形 $CDEF$. 已知图

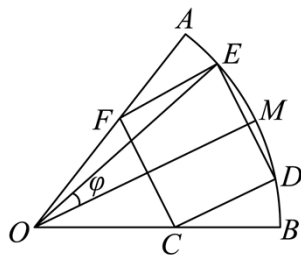
I: 矩形 $CDEF$ 的顶点 C, D 在扇形的半径 OB 上, 顶点 E 在圆弧 AB 上, 顶点 F 在半径 OA 上, 设

$\angle EOB = \theta$. 图 II: 点 M 是圆弧 AB 的中点, 矩形 $CDEF$ 的顶点 D, E 在圆弧 AB 上, 且关于直线 OM 对

称, 顶点 C, F 分别在半径 OB, OA 上, 设 $\angle EOM = \varphi$ ()



图I



图II

- A. 图 I 矩形 $CDEF$ 面积最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. 图 I 矩形 $CDEF$ 面积最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. 图 II 矩形 $CDEF$ 面积最大值是 $6-3\sqrt{3}$
- D. 图 II 矩形 $CDEF$ 面积最大值是 $6-2\sqrt{3}$

三、填空题（本大题共 3 小题，共 15 分）

12. 抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的焦点坐标是_____.
13. 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 a 正方形，侧棱 AA_1 的长为 b ，且 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 120^\circ$ ，则 AC_1 的长为_____.
14. 已知实数 x, y 满足 $x < ey < 1$ 且 $y \ln x - y \ln y = \frac{x^2}{e^x}$ ，则 $\frac{x}{y} - 2x$ 的最小值为_____.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分）

15. 一个车间有 3 台机床，它们各自独立工作，其中 A 型机床 2 台，B 型机床 1 台. A 型机床每天发生故障的概率为 0.1，B 型机床每天发生故障的概率为 0.2.

(1) 记 X 为每天发生故障的机床数，求 X 的分布列及期望 $E(X)$ ；

(2) 规定：若某一天有 2 台或 2 台以上的机床发生故障，则这一天车间停工进行检修. 求某一天在车间停工的条件下，B 型机床发生故障的概率.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2, a_{n+1} = 2S_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列. 设

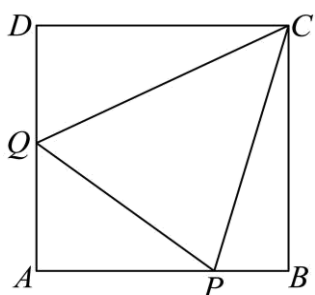
$$T_n = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \dots + \frac{1}{d_n} \quad (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 求 } T_n;$$

17. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 与直线 $l: y = kx + m (k \neq \pm 2)$ 有唯一的公共点 M ,

(1) 若 l 与直线 $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 交于点 N , 证明: 以 MN 为直径的圆过双曲线 E 的右焦点;

(2) 过点 M 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴, y 轴于 $A(x, 0), B(0, y)$ 两点. 当点 M 运动时, 求点 $P(x, y)$ 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 a , P, Q 分别为边 AB, AD 上的点.



(1) 若 $\triangle CPQ$ 是等边三角形, 求 $\triangle APQ$ 的面积

(2) $\triangle APQ$ 的周长为 $2a$,

(i) 求 $\angle PCQ$ 的大小;

(ii) 若 $a = \sqrt{2} + 1$, O 是 AC 的中点, 设 S 为 $\triangle PCQ$ 的面积, 将 $\triangle APQ$ 沿 PQ 折成直二面角 $A' - PQ - C$, 求当 S 取最小值时, 直线 $A'P$ 与平面 $A'OQ$ 所成角的正弦值.

19. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x + m)$, 其中 $m \geq 1$.

(1) 设 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y = f(x)$ 有两个不同的零点 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < 0 < x_2$,

(i) 求参数 m 的取值范围;

(ii) 求证: $e^{x_2 - x_1} - \ln(x_2 - x_1 + 1) > e - 1$.

2025 届高三年级第二学期数学测试试题

(2 月 22 日)

一、单选题 (本大题共 8 小题, 共 40 分)

1. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = x\}$, 集合 $N = \{(x, y) | 2x - y = 1 \text{ 且 } x + 4y = 5\}$, $p \in M$ 是 $p \in N$ 的 () 条件.

A. 充分不必要

B. 必要不充分

C. 充要

D. 既不充分又不必要

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件可得 $N \subsetneq M$, 由此可得答案.

【详解】由 $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$ 得, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$,

$$\therefore N = \{(1, 1)\},$$

$$\therefore N \subsetneq M,$$

$\therefore p \in M$ 是 $p \in N$ 的必要不充分条件.

故选: B.

2. 已知 $2i - 3$ 是关于 x 的方程 $2x^2 + px + q = 0 (p, q \in \mathbf{R})$ 一个根, 则 $q =$ ()

A. -10

B. 26

C. -26

D. 13

【答案】B

【解析】

【分析】将 $x = 2i - 3$ 代入方程可得 $(2p - 24)i + 10 - 3p + q = 0$, 进而列方程组求解即可.

【详解】将 $x = 2i - 3$ 代入方程 $2x^2 + px + q = 0$,

$$\text{得 } 2(2i - 3)^2 + p(2i - 3) + q = 0,$$

$$\text{即 } (2p - 24)i + 10 - 3p + q = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2p - 24 = 0 \\ 10 - 3p + q = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } p = 12, q = 26.$$

故选：B.

3. 根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2 = 2.974$. 已知 $P(\chi^2 \geq 3.841) = 0.05$ ，依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，以下结论正确的是 ()

- A. 变量 x 与 y 独立
- B. 变量 x 与 y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05
- C. 变量 x 与 y 不独立
- D. 变量 x 与 y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 0.05

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $\chi^2 = 2.974 < 3.841$ 作出判断.

【详解】由于 $\chi^2 = 2.974 < 3.841$ ，故变量 x 与 y 独立，A 正确，BCD 均错误.

故选：A

4. 在 $\triangle ABC$ 中 $\sin A = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{4}{5}$ 则 $\cos C$ 的值为 ()

- A. $-\frac{16}{65}$
- B. $\frac{56}{65}$
- C. $\frac{16}{65}$ 或 $-\frac{56}{65}$
- D. $-\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据正弦值的大小分析可得 $0 < A < \frac{\pi}{4} < B$ ，进而求 $\cos A, \cos B$ ，再根据 $\cos C = -\cos(A+B)$

结合两角和差公式运算求解，注意 $\cos B$ 的符号.

【详解】因为 $\frac{5}{13} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5}$ ，即 $\sin A < \sin \frac{\pi}{4} < \sin B$ ，可知 $0 < A < \frac{\pi}{4} < B$ ，

且 $\sin A = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{4}{5}$ ，则 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{12}{13}$, $\cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \pm \frac{3}{5}$ ，

若 $\cos B = \frac{4}{5}$ ，可得 $\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B = -\frac{12}{13} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$ ；

若 $\cos B = -\frac{4}{5}$ ，可得 $\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{56}{65}$ ；

综上所述： $\cos C$ 的值为 $-\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$.

故选：D.

5. 已知 $\log_{|a|} \frac{1}{2} < 1, \left(\frac{1}{2}\right)^a < 1, a^{\frac{1}{3}} < 1$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $-1 < a < -\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2} < a < 0$

C. $0 < a < \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} < a < 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数函数、幂函数及对数函数的单调性解不等式可得 a 的取值范围.

【详解】 $\because$ 指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

$\therefore$ 由 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ 得, $a > 0$,

$\because$ 幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

$\therefore$ 由 $a^{\frac{1}{3}} < 1 = 1^{\frac{1}{3}}$ 得, $a < 1$,

$\therefore 0 < a < 1$,

$\therefore \log_{|a|} \frac{1}{2} < 1$ 可化为 $\log_a \frac{1}{2} < 1 = \log_a a$,

$\because 0 < a < 1$ 时, 指数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}$.

故选: C.

6. 在孟德尔豌豆试验中, 子二代基因型为 DD, Dd, dd , 其中 D 为显性基因, d 为隐性基因, 且这三种基因型的比为 $1:2:1$, 如果在子二代中任意选取 2 株豌豆进行杂交试验, 那么子三代中基因型为 dd 的概率为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{16}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{16}$

【答案】A

【解析】

【分析】由条件概率与全概率公式求解即可.

【详解】记事件 B : 子三代中基因型为 dd , 因父本中含 DD 时子三代为 dd 的概率为 0, 故父本基因选择如下:

记事件 A_1 : 选择的是 Dd 、 Dd , 记事件 A_2 : 选择的是 dd 、 dd , 记事件 A_3 : 选择的是 Dd 、 dd ,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(A_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, \quad P(A_3) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

在子二代中任取 2 株豌豆杂交, 分以下三种情况讨论:

$$\text{若选择的是 } Dd、Dd, \text{ 则子三代中基因型为 } dd \text{ 的概率为: } P(B|A_1) = \frac{1}{4},$$

$$\text{若选择的是 } dd、dd, \text{ 则子三代中基因型为 } dd \text{ 的概率为: } P(B|A_2) = 1,$$

$$\text{若选择的是 } Dd、dd, \text{ 则子三代中基因型为 } dd \text{ 的概率为 } P(B|A_3) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{综上, } P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

因此, 子三代中基因型为 dd 的概率是 $\frac{1}{4}$.

故选: A.

7. 已知 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+2}{4n+5}$, 设点 A 是直线 BC 外一点, 点 P 是直

线 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{a_2+a_6}{b_3} \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}$, 则实数 λ 的值为 ()

A. $\frac{8}{25}$

B. $-\frac{9}{25}$

C. $\frac{2}{25}$

D. $-\frac{21}{25}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $S_n = (3n+2)nk, T_n = (4n+5)nk$, 利用三点共线得 $\frac{a_2+a_6}{b_3} + \lambda = 1$, 根据等差数列的性质求

得 $\frac{a_4}{b_3}$ 可得答案.

【详解】 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{(3n+2)nk}{(4n+5)nk} (k \neq 0)$, 不妨设 $S_n = (3n+2)nk, T_n = (4n+5)nk$,

因为 P, B, C 三点共线, 所以 $\frac{a_2+a_6}{b_3} + \lambda = 1$,

$$\text{所以 } \frac{2a_4}{b_3} + \lambda = 1, \frac{a_4}{b_3} = \frac{2a_4}{2b_3} = \frac{a_1 + a_7}{b_1 + b_5} = \frac{\frac{a_1 + a_7}{2} \times 7}{\frac{b_1 + b_5}{2} \times 5} \times \frac{5}{7} = \frac{S_7}{T_5} \times \frac{5}{7}$$

$$= \frac{7k(21+2)}{5k(20+5)} \times \frac{5}{7} = \frac{23}{25},$$

$$\text{所以 } \frac{2a_4}{b_3} + \lambda = \frac{46}{25} + \lambda = 1, \lambda = -\frac{21}{25},$$

故选：D.

8. 设 D 是含数 1 的有限实数集， $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图象重合，则在以下各项中， $f(1)$ 的可能取值只能是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的定义即可得到结果.

【详解】由题意得到：问题相当于圆上由 12 个点为一组，每次绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后与下一个点会重合.

我们可以通过代入和赋值的方法当 $f(1) = \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0$ 时，此时得到的圆心角为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0$ ，然而此时

$x=0$ 或者 $x=1$ 时，都有 2 个 y 与之对应，而我们知道函数的定义就是要求一个 x 只能对应一个 y ，因此只

有当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，此时旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，此时满足一个 x 只会对应一个 y ，

故选 B.

【点睛】本题考查函数的定义，即“对于集合 A 中的每一个值，在集合 B 中有唯一的元素与它对应”（不允许一对多）.

二、多选题（本大题共 3 小题，共 15 分）

9. 平面 α 垂直于平面 β ，且 $\alpha \cap \beta = l$ ，下列命题正确的是 ()

- A. 平面 α 内一定存在直线平行于平面 β
- B. 平面 α 内已知直线必垂直于平面 β 内无数条直线

C. 平面 α 内任一条直线必垂直于平面 β

D. 过平面 α 内任意一点作交线 l 的垂线, 则此垂线必垂直于平面 β

【答案】AB

【解析】

【分析】根据面面垂直、线面垂直、以及线线垂直的判定和性质, 对每个选项进行逐一分析, 即可判断和选择.

【详解】对 A: 因为 $l \subset$ 面 β , 则平面 α 内只要是平行于 l 的直线, 都平行于平面 β , 故 A 正确;

对 B: 在平面 β 内作直线 l 的垂线 m , 则 $m \perp$ 面 α , 则 m 垂直于平面 α 的任意直线;

故平面 α 内已知直线必垂直于直线 m , 以及与 m 平行的无数条直线, 故 B 正确;

对 C: 平面 α 内垂直于两平面交线 l 的直线才垂直于平面 β , 故 C 错误;

对 D: 过平面 α 内, 且在交线 l 外的一点作交线 l 的垂线, 则此垂线必垂直于平面 β , 故 D 错误;

故选: AB.

10. 一动圆 M 与 $\odot C_1: x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0, \odot C_2: x^2 + y^2 - 6x = 0$ 都相切, 则动圆圆心 M 的轨迹方程可能情形是 ()

A. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x \leq -1)$

B. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x > 1)$

C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 (x \leq -2)$

D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 (x \geq 2)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求出圆 C_1 、圆 C_2 的圆心坐标和半径, 讨论圆 M 与两圆的位置关系, 结合双曲线的定义可得结果.

【详解】由题意得, 圆 C_1 方程可化为 $(x+3)^2 + y^2 = 1$, 故 $C_1(-3, 0)$, 圆 C_1 半径 $r_1 = 1$,

圆 C_2 方程可化为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$, 故 $C_2(3, 0)$, 圆 C_2 半径 $r_2 = 3$,

$\therefore$ 两圆的圆心距 $|C_1C_2| = 6$,

由 $|C_1C_2| > r_1 + r_2$ 得两圆相离, 设动圆 M 的半径为 R , 圆心 $M(x, y)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/857044113063010050>