

# 第四章数列

## 4.2.2 第3课时

### 等差数列的前 $n$ 项和公式及相关性质



## 学习目标

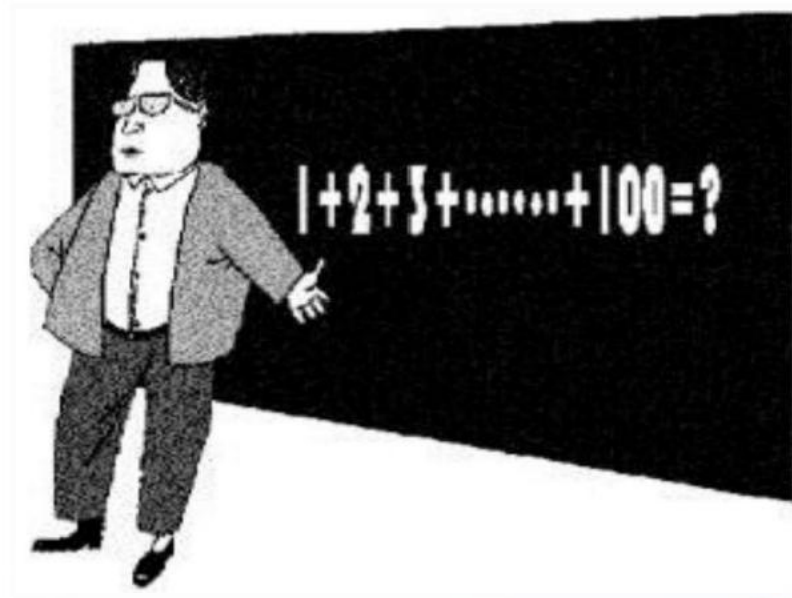
素养目标	学科素养
1. 等差数列的前 $n$ 项和公式及其应用. (重点)	1、数学抽象 2、数学运算
2. 等差数列的前 $n$ 项和公式的推导过程. (难点)	3、逻辑推理

## 创设情境

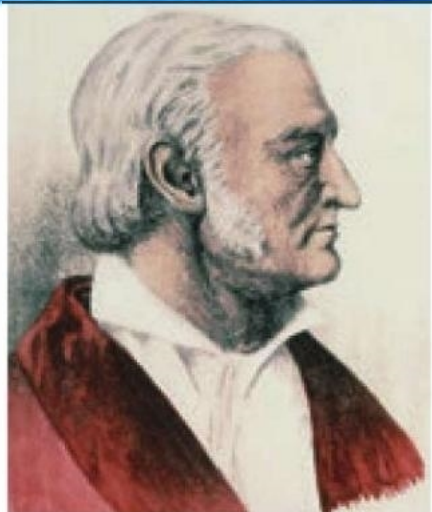
据说，200多年前，高斯的算术老师提出了下面的问题：

$$1+2+3+\dots+100=?$$

你准备怎么算呢？



## 探究新知



高斯 (Gauss, 1777—1855), 德国数学家, 近代数学的奠基者之一. 他在天文学、大地测量学、磁学、光学等领域都做出过杰出贡献.

$$\begin{aligned} \text{高斯的算法: } & 1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100= (1+100) \\ & + (2+99) + \cdots + (50+51) = 101 \times 50 = 5050 \end{aligned}$$

高斯算法的高明之处在于他发现这100个数可以配对成50对:

- 第一个数与最后一个数一对;
- 第二个数与倒数第二个数一对;
- 第三个数与倒数第三个数一对, ……

配对后每对数的和均相等, 都等于101, 高斯算法是将不同数的求和问题转化成了相同数(即101)的求和, 快速准确得到结果.

## 探究新知

问题1: 为什么  $1+100=2+99=\cdots=50+51$  呢?

这是巧合吗? 试从数列角度给出解释.

应用等差数列的性质:

若  $m+n=p+q$  时, 则  $a_m+a_n=a_p+a_q$

## 探究新知

问题2: 你能利用高斯算法求 $1+2+\cdots+100+101$ 吗?

思路1. (拿出中间项, 再首尾配对):

$$\text{原式} = (1+101) + (2+100) + \cdots + (50+52) + 51$$

思路2. (拿出末项, 再首尾配对):

$$\text{原式} = (1+2+\cdots+100) + 101$$

思路3. (先凑成偶数项, 再配对):

$$\text{原式} = (0+1+2+\cdots+101)$$

类比、推广一般情况:

问题3: 你能计算 $1+2+3+\cdots+n$ 吗?

请同学们动笔书写运算过程

## 探究新知

思考：按高斯的算法，需要对等差数列各项进行“配对”，那么项数为奇数和项数为偶数时，前 $n$ 项和是否一样呢？

我们以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n$ 为例，进行谈论；  
当 $n$ 是偶数时，有

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$= (1+n) + [2 + (n-1)] + \cdots + \left[ \frac{n}{2} + \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \right]$$

$$= (1+n) + (1+n) + \cdots + (1+n)$$

$$= \frac{n(1+n)}{2}$$

## 探究新知

当 $n$ 为奇数时，有

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= (1+n) + [2 + (n-1)] + \dots + \left[ \left( \frac{n+1}{2} - 1 \right) + \left( \frac{n+1}{2} + 1 \right) \right] + \frac{n+1}{2}$$

$$= (1+n) + (1+n) + \dots + (1+n) + \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n-1}{2} \cdot (1+n) + \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n(1+n)}{2}$$

所以，对任意正整数 $n$ ，都有

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

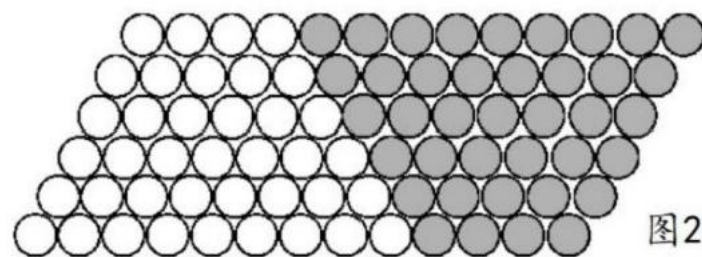
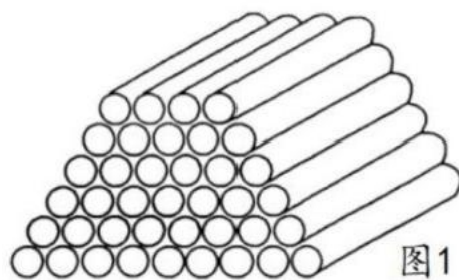
思考：项数分奇偶得到的结果是一样的，那么是否能避免分类谈论呢？



## 探究新知

某仓库堆放的一堆钢管(如图),最上面的一层有4根钢管,下面的每一层都比上一层多一根,最下面的一层有9根,怎样计算这堆钢管的总数呢?

请同学们观察两幅图形,思考钢管数关系?



这样,按照图2,每层的钢管数都等于 $4+9$ ,共有6层。从而图1钢管的

$$\text{总数为 } \frac{6 \times (4+9)}{2} = 39$$

思考: 如何推导等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和公式  $S_n$  呢?

## 探究新知

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1)$$

$$\text{因为: } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_n + a_1$$

$$\text{所以: } 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

$$= n(a_1 + a_n)$$

$$\text{即: } S_n = \frac{n(1 + a_n)}{2}$$

## 倒序相加法

## 探究新知

等差数列前n项和公式

由上得出：等差数列{  $a_n$  }的前n项和公式  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

又因为  $a_n = a_1 + (n-1)d$

所以上述公式又可以写成  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

已知量	首项，末项与项数	首项，公差与项数
选用公式	$S_n = \underline{\hspace{2cm}}$	$S_n = \underline{\hspace{2cm}}$

## 探究新知

### 等差数列的前n项公式

已知量	首项，末项与项数	首项，公差与项数
选用公式	$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

功能1: 已知 $a, a_1$  和  $n$ , 求  $S$

功能2: 已知 $S, n, a_1$  和  $a$ , 中任意3个, 求第4个

## 等差数列的前n项公式的性质

(1) 若  $S_m, S_{2m}, S_{3m}$  分别为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $m$  项, 前  $2m$  项, 前  $3m$  项的和, 则  $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$  成等差数列, 公差为  $m^2 d$ .

2) 设两个等差数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n, T_n$  则  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$ .

(3) 若等差数列  $\{a_n\}$  的项数为  $2n (n \in \mathbb{N})$ , 则  $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$ ,

$$S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \quad \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} (S_{\text{奇}} \neq 0).$$

(4) 若等差数列  $\{a_n\}$  的项数为  $2n+1 (n \in \mathbb{N})$ , 则  $S_{2n+1} = (2n+1)a_{n+1}$  ( $a_{n+1}$  是数列的中间项).

$$S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = -a_{n+1}, \quad \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{n}{n+1}$$

( $S_{\text{奇}} \neq 0$ ). 其中,  $S_{\text{奇}}$  表示数列  $\{a_n\}$  的奇数项的和,  $S_{\text{偶}}$  表示数列  $\{a_n\}$  的偶数项的和.

## 微判断

---

1. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_n$  与  $a_n$  不可能相等. ( X )
2. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  一定是关于  $n$  的二次函数. ( X )

## 微训练

1. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=2, a_{10}=3$ , 则其前10项的和  $S_{10}$  等于 **65**

解析 由  $a_1=2, a_{10}=3$  得  $d=1$ , 故,  $S_{10} = 10a_1 + \frac{1}{2} \times 10 \times 9d = 10 \times 2 + 45 = 65$ .

2. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_1=-1, S_{25}=30$ , 则公差  $d = \frac{11}{60}$ .

解析 由  $S_{25} = -25 + \frac{1}{2} \times 24 \times 25 \times d = 30$ , 解得,  $d = \frac{11}{60}$ .

3. 数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 它的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_n = (n+1)^2 + \lambda$ , 则实数  $\lambda$  的值是  $-1$ .

解析  $\because$  等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  的形式为  $S_n = an^2 + bn$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $\therefore \lambda = -1$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/857133133153006115>