

吉祥

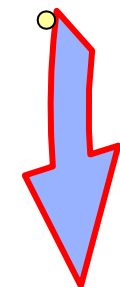
关于高中数学排列与组合



问题1

从已知的
3 个不同
元素中每
次取出2
个元素
, 按照一
定的顺序
排成一列.

有
顺
序

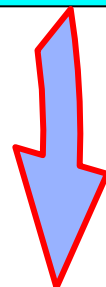


排列

问题2

从已知的
3个不同
元素中每
次取出2
个元素
, 并成一
组

无
顺
序



组合

组合定义：

一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素**并成一组**，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**

排列与组合的概念有什么共同点与不同点？

概念讲解

排列定义：一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素，按照一定的顺序排成一行，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

组合定义：一般地，从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

共同点：都要“从 n 个不同元素中任取 m 个元素”

不同点：排列与元素的顺序有关，
而组合则与元素的顺序无关。

概念理解

思考一： ab 与 ba 是相同的排列还是相同的组合？为什么？

思考二：两个相同的排列有什么特点？两个相同的组合呢？

- 1) 元素相同；
- 2) 元素排列顺序相同。

元素相同

思考三：组合与排列有联系吗？

构造排列分成两步完成，先取后排；而构造组合就是其中一个步骤。

判断下列问题是组合问题还是排列问题？

(1) 设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$ ，则集合 A 的含有3个元素的子集有多少个？

组合问题

(2) 某铁路线上有5个车站，则这条铁路线上共需准备多少种车票？

排列问题

有多少种不同的火车票价？

组合问题

(3) 10名同学分成人数相同的3组，有多少种分法？

组合是选择的结果，排列是选择后再排序的结果。

(4) 10人聚会，见面后每两人之间握手一次，共握手多少次？

组合问题

(5) 从4个风景点中选出2个游览，有多少种不同的方法？

组合问题

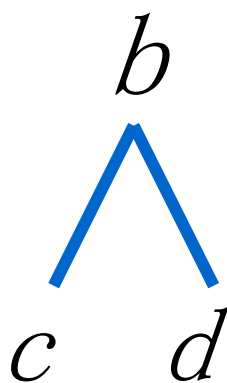
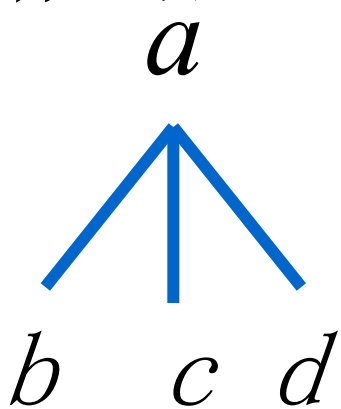
(6) 从4个风景点中选出2个，并确定这2个风景点的游览顺序，有多少种不同的方法？

排列问题

概念理解

1. 从 a, b, c 三个不同的元素中取出两个元素的所有组合分别是：
 ab, ac, bc (3个)

2. 已知4个元素 a, b, c, d ，写出每次取出两个元素的所有组合.



ab, ac, ad, bc, bd, cd (6个)

组合数:

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有组合的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**, 用符号 C_n^m 表示.

注意:

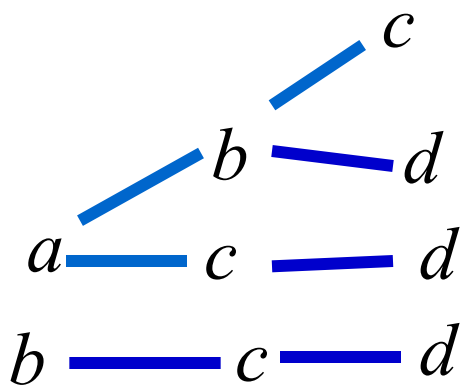
C_n^m 是一个数, 应该把它与“组合”区别开来.

如: 从 a, b, c 三个不同的元素中取出两个元素的所有组合个数是: $C_3^2 = 3$

如: 已知4个元素 a, b, c, d , 写出每次取出两个元素的所有组合个数是: $C_4^2 = 6$

练一练

1. 写出从 a, b, c, d 四个元素中任取三个元素的所有组合。



abc , abd , acd , bcd .

组合

排列

abc



<i>abc</i>	<i>bac</i>	<i>cab</i>
<i>acb</i>	<i>bca</i>	<i>cba</i>

abd



<i>abd</i>	<i>bad</i>	<i>dab</i>
<i>adb</i>	<i>bda</i>	<i>dba</i>

acd



<i>acd</i>	<i>cad</i>	<i>dac</i>
<i>cda</i>	<i>dca</i>	

bcd



<i>cbd</i>	<i>dbc</i>
<i>cdb</i>	<i>dcb</i>

你发现了
什么?

不写出所有组合，怎样才能知道组合的种数？

求 A_4^3 可分两步考虑:
求 P_4^3 可分两步考虑

第一步, C_4^3 ($=4$) 个;

第二步, A_3^3 ($=6$) 个;

根据分步计数原理, $A_4^3 = C_4^3 \cdot A_3^3$.

从而 $C_4^3 = \frac{A_4^3}{A_3^3} = \frac{P_4^3}{A_3^3}$

如何计算:


$$C_n^m$$

组合数公式

排列与组合是有区别的，但它们又有联系。

一般地，求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，可以分为以下2步：

第1步，先求出从这 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m 。

第2步，求每一个组合中 m 个元素的全排列数 A_n^m 。

根据分步计数原理，得到：
$$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$$

$$\text{因此： } C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

这里 $m, n \in N,^*$ 且 $m \leq n$ ，这个公式叫做**组合数公式**。

概念讲解

从 n 个不同元中取出 m 个元素的排列数

$$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$$

组合数公式:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{我们规定: } C_n^0 = 1.$$

例题分析

- 例1计算: (1) C_7^4 (2) C_{10}^7
- (3) 已知 $C_n^3 = A_n^2$, 求 n .
- (4) 求 $C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$ 的值.

例2. 甲、乙、丙、丁4支球队举行单循环赛,

- (1) 列出所有各场比赛的双方;
- (2) 列出所有冠亚军的可能情况.

解: (1) 甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁

(2) 甲乙、甲丙、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁

乙甲、丙甲、丁甲、丙乙、丁乙、丁丙

例3 求证: $C_n^m = \frac{m+1}{n-m} \cdot C_n^{m+1}$.

证明: $Q C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$,

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{n-m} \cdot C_n^{m+1} &= \frac{m+1}{n-m} \cdot \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\ &= \frac{m+1}{(m+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-m)(n-m-1)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m. \end{aligned}$$



典型例题



例1：一位教练的足球队共有17名初级学员，他们中以前没有一人参加过比赛。按照足球比赛规则，比赛时一个足球队的上场队员是11人。问：

(1) 这位教练从这17名学员中可以形成多少种学员上场方案？

(2) 如果在选出11名上场队员时，还要确定其中的守门员，那么教练员有多少种方式做这件事情？





典型例题



例2. (1) 平面内有10个点，以其中每2个点为端点的线段共有多少条？

(2) 平面内有10个点，以其中每2个点为端点的有向线段共有多少条？



例3. (1) 凸五边形有多少条对角线？

(2) 凸 n ($n > 3$) 边形有多少条对角线？





典型例题



例4：在100件产品中有98件合格品，2件次品。产品检验时，从100件产品中任意抽出3件。

- (1)一共有多少种不同的抽法？
- (2)抽出的3件中恰好有1件是次品的抽法有多少种？
- (3)抽出的3件中至少有1件是次品的抽法有多少种？
- (4)抽出的3件中至多有一件是次品的抽法有多少种？

说明：“至少”“至多”的问题，通常用分类法或间接法求解。

变式练习

按下列条件，从12人中选出5人，有多少种不同选法？

(1) 甲、乙、丙三人必须当选； $C_3^3 C_9^2 = 36$

(2) 甲、乙、丙三人不能当选； $C_3^0 C_9^5 = 126$

(3) 甲必须当选，乙、丙不能当选； $C_1^1 C_9^4 = 126$

(4) 甲、乙、丙三人只有一人当选； $C_3^1 C_9^4 = 378$

(5) 甲、乙、丙三人至多2人当选；

(6) 甲、乙、丙三人至少1人当选；

(5)方法一： $C_3^2 C_9^3 + C_3^1 C_9^4 + C_3^0 C_9^5 = 756$

方法二： $C_{12}^5 - C_3^3 C_9^2 = 756$

(6)方法一： $C_3^3 C_9^2 + C_3^2 C_9^3 + C_3^1 C_9^4 = 666$

方法二： $C_{12}^5 - C_3^0 C_9^5 = 666$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/858032100014006052>