§10.3　二项式定理

考试要求

能用多项式运算法则和计数原理证明二项式定理，会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

内容索引

第一部分

落实主干知识

知识梳理

1.二项式定理

二项式定理	$(a+b)^n=$ $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$
二项展开式的通项	$T_{k+1}=$ $C_n^ka^{n-k}b^k$，它表示展开式的第 $k+1$ 项
二项式系数	C_n^k $(k=0,1,\cdots,n)$

知识梳理

2.二项式系数的性质

(1)对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数__相等__.

(2)增减性与最大值：当n是偶数时，中间的一项__$C_n^{\frac{n}{2}}$__取得最大值；当n是奇数时，中间的两项__$C_n^{\frac{n-1}{2}}$__与__$C_n^{\frac{n+1}{2}}$__相等，且同时取得最大值.

(3)各二项式系数的和：$(a+b)^n$的展开式的各二项式系数的和为$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=$__$2^n$__.

常用结论

1.$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

2.$C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m$.

思考辨析

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)$C_n^k a^{n-k} b^k$是$(a+b)^n$的展开式中的第k项.(×)

(2)$(a+b)^n$的展开式中每一项的二项式系数与a，b无关.(√)

(3)通项公式$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$中的$a$和$b$不能互换.(√)

(4)二项式的展开式中的系数最大项与二项式系数最大项是相同的.(×)

教材改编题

1. $\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^{10}$ 的展开式中 x^2 的系数等于

A. 45　　B. 20　　C. -30　　D. -90

解析

因为展开式的通项为 $T_{k+1}=(-1)^k C_{10}^k x^{\frac{k}{2}}\cdot x^{-(10-k)}=(-1)^k C_{10}^k x^{-10+\frac{3}{2}k}$，

令 $-10+\frac{3}{2}k=2$，得 $k=8$，所以展开式中 x^2 的系数为 $(-1)^8\times C=45$.

2.已知 $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=243$，则 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$等于

A.31　　B.32　　C.15　　D.16

解析

逆用二项式定理得 $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=(1+2)^n=243$，

即$3^n=3^5$，所以$n=5$，

所以 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^5-1=31.$

教材改编题

3.若$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中二项式系数之和为64，则展开式的常数项为__20__.

解析

因为二项式系数之和为$2^n=64$，

所以$n=6$，则$T_{k+1}=C_6^k\cdot x^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_6^k x^{6-2k}$，

当$6-2k=0$，即$k=3$时为常数项，$T_4=C_6^3=20$.

返回

第二部分

探究核心题型

命题点1 形如$(a+b)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式的特定项

例1 (1)二项式$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-x^2\right)^{10}$的展开式中的常数项是

A.-45　　B.-10　　C.45　　D.65

解析

由二项式定理得 $T_{k+1}=\mathrm{C}_{10}^{k}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10-k}(-x^2)^k=(-1)^k\mathrm{C}_{10}^{k}x^{\frac{5k}{2}-5}$，

令$\dfrac{5k}{2}-5=0$得$k=2$，所以常数项为$(-1)^2\mathrm{C}_{10}^{2}=45$.

(2)已知$\left(x-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式中$x^5$的系数为$A$，$x^2$的系数为$B$，若$A+B=11$，则$a=$____$\pm 1$____.

解析

$\left(x-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k x^{5-k}\cdot\left(-\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^k=(-a)^k C_5^k\, x^{5-\frac{3}{2}k}$.

由 $5-\dfrac{3}{2}k=5$，得 $k=0$，由 $5-\dfrac{3}{2}k=2$，得 $k=2$，

所以 $A=C_5^0\times(-a)^0=1$，$B=C_5^2\times(-a)^2=10a^2$，

则由$1+10a^2=11$，解得$a=\pm 1$.

命题点2　形如$(a+b)^m(c+d)^n$ (m，$n\in N^*$)的展开式问题

例2　(1)$(1+x)^8(1+y)^4$的展开式中x^2y^2的系数是

A.56　　B.84　　C.112　　D.168

解析

在$(1+x)^8$的展开式中含x^2的项为$C_8^2x^2=28x^2$，$(1+y)^4$的展开式中含y^2的项为$C_4^2y^2=6y^2$，所以x^2y^2的系数为$28\times6=168$.

(2)在$(2x+a)\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$的展开式中，$x^2$的系数为$-120$，则该二项展开式中的常数项为

A.3 204　　B.-160　　C.160　　D.-320

解析

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$的展开式的通项为 $T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\cdot x^{6-k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^k=\mathrm{C}_6^k\cdot 2^k\cdot x^{6-2k}$，

$2xT_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\cdot 2^{k+1}\cdot x^{7-2k}$，由 $k\in\mathbf{N}$，得 $7-2k\neq 2$，故不成立，

$aT_{k+1}=a\mathrm{C}_6^k\cdot 2^k\cdot x^{6-2k}$，令 $6-2k=2$，解得 $k=2$，

则 $a\mathrm{C}_6^2\cdot 2^2=60a=-120$，解得 $a=-2$，

$\because 7-2k\neq 0$，在$-2T_{k+1}$中，令$6-2k=0$，解得$k=3$，

$\therefore$展开式中的常数项为$-2\mathrm{C}_6^3\cdot 2^3=-320$.

思维升华

(1)求二项展开式中的特定项，一般是化简通项后，令字母的指数符合要求(求常数项时，指数为零；求有理项时，指数为整数等)，解出项数$k+1$，代回通项即可.

(2)对于几个多项式积的展开式中的特定项问题，一般可以根据因式连乘的规律，结合组合思想求解，但要注意适当地运用分类方法，以免重复或遗漏.

跟踪训练1 (1)(2022·新高考全国Ⅰ)$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为__$-28$__(用数字作答).

解析

$(x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k x^{8-k}y^k$，$k=0,1$，…，$7,8$.

令 $k=6$，得 $T_{6+1}=C_8^6 x^2y^6$；

令 $k=5$，得 $T_{5+1}=C_8^5 x^3y^5$，

所以$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 $C_8^6-C_8^5=-28$.

(2)在二项式$(\sqrt{2}+x)^9$的展开式中，常数项是$\underline{\ 16\sqrt{2}\ }$；系数为有理数的项的个数是$\underline{\ 5\ }$.

解析

由题意得，$(\sqrt{2}+x)^9$ 的通项公式为 $T_{k+1}=C_9^k(\sqrt{2})^{9-k}\cdot x^k(k=0,1,2,\cdots,9)$.

当 $k=0$ 时，可得常数项为 $T_1=C_9^0(\sqrt{2})^9=16\sqrt{2}$.

若展开式的系数为有理数，则$k=1,3,5,7,9$，有T_2，T_4，T_6，T_8，T_{10}，共5个.

命题点1 二项式系数和与系数和

例3 (1)在$\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中，各项系数和与二项式系数和之和为128，则

A.二项式系数和为32

B.各项系数和为128

C.常数项为－135

D.常数项为135

解析

令$x=1$，得各项系数和为2^n，又二项式系数和为2^n，

则$2\times2^n=128$，得$n=6$，即二项式系数和为64，各项系数和也为64，

故A，B不正确；

$\left(3x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k\cdot(3x)^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$

$=C_6^k\cdot(-1)^k3^{6-k}\cdot x^{6-\frac{3}{2}k}$，

令$6-\frac{3}{2}k=0$，得$k=4$，

因此展开式中的常数项为$T_5=C_6^4\cdot(-1)^4\cdot3^2=135$，故C不正确，D正确.

(2)若$(1+x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则$a_2+a_6+a_8=$___300___；$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=$___5 120___.

解析

①由已知得$(1+x)^{10}$展开式的通项为$T_{k+1}=C_{10}^k x^k$，所以展开式中每一项的系数即为其二项式系数.

故$a_2+a_6+a_8=C_{10}^2+C_{10}^6+C_{10}^8=300$.

②对原式两边求导得，$10(1+x)^9=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+10a_{10}x^9$.

令$x=1$，得$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=10\times2^9=5\ 120$.

命题点2　系数与二项式系数的最值问题

例4　(多选)(2023·唐山模拟)下列关于$\left(\frac{1}{x}-2x\right)^6$的展开式的说法中正确的是

A.常数项为-160

B.第4项的系数最大

C.第4项的二项式系数最大

D.所有项的系数和为1

解析

$\left(\dfrac{1}{x}-2x\right)^6$展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{6-k}\cdot(-2x)^k=(-2)^kC_6^k\cdot x^{2k-6}$.

对于A，令$2k-6=0$，解得$k=3$，

∴常数项为$(-2)^3C_6^3=-8\times20=-160$，A 正确；

对于B，由通项公式知，若要系数最大，k所有可能的取值为0,2,4,6，

∴$T_1=x^{-6}$，$T_3=4C_6^2x^{-2}=60x^{-2}$，$T_5=(-2)^4C_6^4x^2=240x^2$，$T_7=(-2)^6x^6=64x^6$，

∴展开式第5项的系数最大，B错误；

对于C，展开式共有7项，得第4项的二项式系数最大，C正确；

对于D，令$x=1$，则所有项的系数和为$(1-2)^6=1$，D正确.

思维升华

赋值法的应用

一般地，对于多项式$(a+bx)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，令$g(x)=(a+bx)^n$，则$(a+bx)^n$的展开式中各项的系数和为$g(1)$，$(a+bx)^n$的展开式中奇数项的系数和为$\frac{1}{2}[g(1)+g(-1)]$，$(a+bx)^n$的展开式中偶数项的系数和为$\frac{1}{2}[g(1)-g(-1)]$.

跟踪训练2　(1)(多选)对于$\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$的展开式，下列说法正确的是

A.所有项的二项式系数和为64

B.所有项的系数和为64

C.常数项为1 215

D.系数最大的项为第3项

解析

$\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6$的展开式中所有项的二项式系数和为$2^6=64$，故A正确；

在$\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^6$中，令$x=1$，得$(1-3)^6=64$，故B正确；

展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k(x^2)^{6-k}\cdot\left(-\frac{3}{x}\right)^k=(-3)^kC_6^kx^{12-3k}(0\leqslant k\leqslant 6, k\in\mathbf{N})$，

令$12-3k=0$，得$k=4$，所以常数项为$(-3)^4C_6^4=1\,215$，故C正确；

由C的分析可知第2,4,6项系数为负值，第1项系数为1，

第3项系数为$(-3)^2C_6^2=135$，第5项系数为$(-3)^4C_6^4=1\,215$，

第7项系数为$(-3)^6C_6^6=729$，则系数最大的项为第5项，故D不正确.

(2)设$(\sqrt{2}+x)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_9)^2$的值为__1__.

解析

令 $x=1$ 有 $a_0+a_1+\cdots+a_{10}=(\sqrt{2}+1)^{10}$，令 $x=-1$ 有 $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}=(\sqrt{2}-1)^{10}$，

故$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_9)^2=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10})\cdot(a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10})=(\sqrt{2}+1)^{10}(\sqrt{2}-1)^{10}=1$.

例5 (1)设$a\in\mathbf{Z}$，且$0\leqslant a\leqslant 13$，若$51^{2\,023}+a$能被13整除，则a等于

A.0　　B.1　　C.11　　D.12

解析

因为$a\in\mathbf{Z}$，且$0\leqslant a\leqslant 13$，

所以 $51^{2\,023}+a=(52-1)^{2\,023}+a=C_{2\,023}^{0}52^{2\,023}-C_{2\,023}^{1}52^{2\,022}+C_{2\,023}^{2}52^{2\,021}-\cdots+C_{2\,023}^{2\,022}52-C_{2\,023}^{2\,023}+a$，

因为$51^{2\,023}+a$能被13整除，

所以$-C_{2\,023}^{2\,023}+a=-1+a$ 能被 13 整除，结合选项，

所以$a=1$.