

# 永州市 2022 年下期高二期末质量监测试卷

## 数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 下列直线经过第一象限且斜率为-1 的是 ( )

A.  $x + y + 1 = 0$

B.  $x + y - 1 = 0$

C.  $x - y - 1 = 0$

D.  $x - y + 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意利用直线方程的斜截式即可选出答案。

【详解】满足题意的直线方程通式为： $y = -x + b \Rightarrow x + y - b = 0 (b > 0)$

故选：B

2. 已知  $\vec{a} = (1, -2, -2)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, 1 - m)$ , 且  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $m =$  ( )

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用向量垂直充要条件列出关于  $m$  的方程，解之即可求得  $m$  的值。

【详解】 $\vec{a} = (1, -2, -2)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, 1 - m)$ , 且  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ,

则  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 则  $2 \times 1 + 2 \times (-2) - 2(1 - m) = 0$ , 解之得  $m = 2$

故选：D

3. 若双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的虚轴长为 8, 渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 则双曲线  $C$  的方程为

( )

A.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

B.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

C.  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$

D.  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据虚轴、渐近线的定义求解.

【详解】由题可得  $\begin{cases} 2b=8 \\ \frac{b}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b=4 \\ a=8 \end{cases}$ , 所以双曲线方程为  $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$ ,

故选:C.

4. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1=1$ ,  $a_{n+1}=2S_n+1(n \in \mathbb{N}^*)$ , 则  $a_5 =$  ( )

- A. 27                      B. 64                      C. 81                      D. 128

【答案】C

【解析】

【分析】利用题给条件即可依次求得  $a_2, a_3, a_4, a_5$  的值.

【详解】数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1=1$ ,  $a_{n+1}=2S_n+1$

则  $a_2=2S_1+1=2a_1+1=3$ ,  $a_3=2S_2+1=2(a_1+a_2)+1=9$ ,

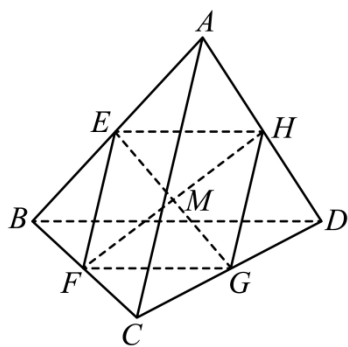
$a_4=2S_3+1=2(a_1+a_2+a_3)+1=27$ ,

$a_5=2S_4+1=2(a_1+a_2+a_3+a_4)+1=81$ .

故选: C.

5. 如图, 在四面体  $ABCD$  中,  $E, F, G, H$  分别是  $AB, BC, CD, DA$  的中点, 点  $M$  是  $EG$  和  $FH$  的交点,

对空间任意一点  $O$  都有  $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OM}$ , 则  $k =$  ( )



- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C. 2                      D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】证明出四边形  $EFGH$  为平行四边形,  $M$  为  $EG$  中点, 利用空间向量基本定理求解即可.

【详解】 $E, F, G, H$  分别是  $AB, BC, CD, DA$  的中点，

故  $EH \parallel BD, EF \parallel GH$ ，

所以  $E, F, G, H$  四点共面，且四边形  $EFGH$  为平行四边形，

故  $M$  为  $EG$  中点，

因为  $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OE}, \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OG}$ ，

所以  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2(\vec{OE} + \vec{OG}) = 4\vec{OM}$ ，

故  $k = 4$ 。

故选：D

6. 已知抛物线  $C$  的焦点为  $F$ ，准线为  $l$ ，过  $F$  的直线  $m$  与  $C$  交于  $A, B$  两点，点  $A$  在  $l$  上的投影为  $D$ ，若

$|AB| = |BD|$ ，则  $\frac{|AF|}{|BF|} = (\quad)$

A.  $\frac{3}{2}$

B. 2

C.  $\frac{5}{2}$

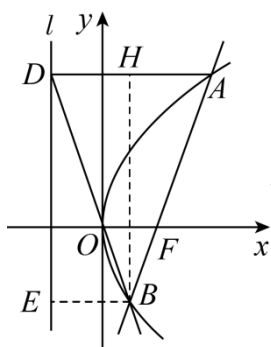
D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】结合图像，分析出点  $H$  为  $AD$  的中点，从而利用抛物线的定义即可求得结果。

【详解】过点  $B$  作  $BE \perp l$ ，垂足为  $E$ ，作  $BH \perp AD$ ，垂足为  $H$ ，如图，



又因为  $AD \perp l$ ，所以四边形  $BEDH$  为矩形，所以  $|BE| = |DH|$ ，

因为  $|AB| = |BD|$ ， $BH \perp AD$ ，所以点  $H$  为  $AD$  的中点，

所以  $|DH| = |AH|$ ，故  $|AD| = 2|DH| = 2|BE|$ ，

由抛物线的定义可得  $|AF| = |AD|$ ， $|BF| = |BE|$ ，所以  $|AF| = 2|BF|$ ，即  $\frac{|AF|}{|BF|} = 2$ 。

故选：B.

7. 已知  $A(-3,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $P$  是圆  $O: x^2 + y^2 = 16$  上的动点, 则  $\triangle ABP$  外接圆的周长的最小值为 ( )

- A.  $\frac{15\pi}{4}$                       B.  $\frac{17\pi}{4}$                       C.  $\frac{19\pi}{4}$                       D.  $\frac{23\pi}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意确定圆  $O: x^2 + y^2 = 16$  和圆  $O_1: (x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 4$ ,

有公共点, 结合圆与圆的位置关系列出不等式可求解.

【详解】 $AB$  中点横坐标为  $x = -1$ , 所以  $\triangle ABP$  外接圆的圆心在  $x = -1$  上,

设圆心为  $O_1(-1, a)$ , 则半径为  $r = AO_1 = \sqrt{4 + a^2}$ ,

圆心距  $d = OO_1 = \sqrt{a^2 + 1}$ ,

圆  $O_1: (x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 4$ ,

又因为  $P$  在圆  $O$  上, 所以圆  $O$  与圆  $O_1$  有公共点,

所以  $|4 - \sqrt{a^2 + 4}| \leq \sqrt{a^2 + 1} \leq 4 + \sqrt{a^2 + 4}$ ,

$\sqrt{a^2 + 1} \leq 4 + \sqrt{a^2 + 4}$  显然成立,

$|4 - \sqrt{a^2 + 4}| \leq \sqrt{a^2 + 1}$  两边同时平方可得,

$16 + 4 + a^2 - 8\sqrt{4 + a^2} \leq a^2 + 1$ , 所以  $8\sqrt{4 + a^2} \geq 19$ ,

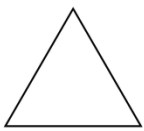
所以  $\sqrt{4 + a^2} \geq \frac{19}{8}$ , 所以  $r \geq \frac{19}{8}$ ,

当且仅当  $4 + a^2 \geq \left(\frac{19}{8}\right)^2$ , 解得  $a = \frac{\sqrt{105}}{8}$  时取得等号,

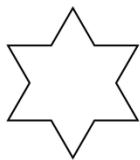
所以周长的最小值为  $2\pi \times \frac{19}{8} = \frac{19\pi}{4}$ ,

故选:C.

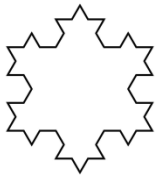
8. 如图, 瑞典数学家科赫在1904年通过构造图形描述雪花形状. 其作法是: 从一个正三角形开始, 把每条边分成三等份, 然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形, 再去掉底边. 反复进行这一过程, 就得到一条“雪花”状的曲线. 设原正三角形(图①)的边长为1, 则图④中图形的面积为 ( )



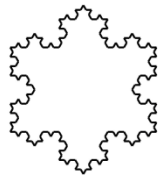
①



②



③



④

A.  $\frac{94\sqrt{3}}{243}$

B.  $\frac{95\sqrt{3}}{243}$

C.  $\frac{94\sqrt{3}}{81}$

D.  $\frac{95\sqrt{3}}{81}$

【答案】A

【解析】

【分析】设图①、②、③、④中正三角形的边长分别为 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ ，图形面积依次记为 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$ ，图形分别记为 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$ ，图形的边数分别记为 $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$ ，易得 $N_n = 3 \times 4^{n-1}$ ，

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ， $S_{n+1} - S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times N_n \times a_{n+1}^2$ ，利用累加法可求得 $S_4$ 的值.

【详解】设图①、②、③、④中正三角形的边长分别为 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ ，

图形面积依次记为 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$ ，图形分别记为 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$ ，

图形的边数分别记为 $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$ ，

观察图形可知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$  ( $n=1,2,3$ )，且 $a_1=1$ ， $N_{n+1} = 4N_n$  ( $n=1,2,3$ )，且 $N_1=3$ ，

由题意可知，数列 $\{N_n\}$ 是首项为1，公比为4的等比数列，则 $N_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ ，

数列 $\{a_n\}$ 是首项为1公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列， $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ，

由图可知，图形 $M_{n+1}$ 是在图形 $M_n$ 的每条边上生成一个小三角形（去掉底边），

共增加了 $N_n$ 个边长为 $a_{n+1}$ 的正三角形，

所以， $S_{n+1} - S_n = N_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} a_{n+1}^2 = 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$ ，

由累加法可得 $S_4 = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_3)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[ \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \left[ 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^3 \right]}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{94\sqrt{3}}{243}$$

故选：A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知  $a, b, c$  为非零实数，则下列说法正确的是（ ）

A.  $2b = a + c$  是  $a, b, c$  成等差数列的充要条件

B.  $b = \sqrt{ac}$  是  $a, b, c$  成等比数列的充要条件

C. 若  $a, b, c$  成等比数列，则  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  成等比数列

D. 若  $a, b, c$  成等差数列，则  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  成等差数列

【答案】AC

【解析】

【分析】根据等差中项与等比中项对选项一一验证即可得出答案。

【详解】对于选项 A：根据等差中项即可得出  $2b = a + c$  是  $a, b, c$  成等差数列的充要条件，故 A 正确；

对于选项 B： $b = \sqrt{ac}$ ，即  $b^2 = ac$ ，又  $a, b, c$  为非零实数，所以根据等比中项即可证明  $a, b, c$  成等比数列，

$a, b, c$  成等比数列，只能证明  $b^2 = ac$ ，即  $b = \sqrt{ac}$  是  $a, b, c$  成等比数列的充分不必要条件，故 B 错误；

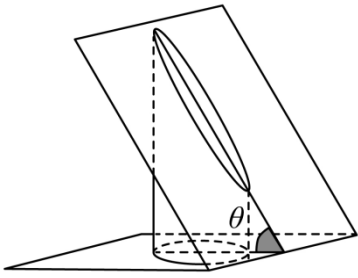
对于选项 C：若  $a, b, c$  成等比数列，则  $b^2 = ac$ ，则  $\left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$ ，则  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  成等比数列，故 C 正确；

对于选项 D：若  $a, b, c$  成等差数列，则  $2b = a + c$ ，无法得到  $2 \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ ，故 D 错误；

故选：AC.

10. 如图，一个底面半径为  $\sqrt{3}$  的圆柱被与其底面所成的角为  $\theta$  的平面所截，截面为椭圆，若  $\theta = 60^\circ$ ，则

( )



- A. 椭圆的短轴长为  $2\sqrt{3}$
- B. 椭圆的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. 椭圆的方程可以为  $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1$
- D. 椭圆上的点到焦点的距离的最小值为  $2\sqrt{3} - 3$

【答案】 ABD

【解析】

【分析】 利用图中的几何性质即可求出  $a, b, c$ ，即可判断 A, B, C 的正误，利用二次函数的性质即可求出椭圆上的点到焦点的距离的最小值。

【详解】 设椭圆的长半轴为  $a$ ，短半轴为  $b$ ，

由已知可知  $\cos 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{2a}$ ，解得  $a = 2\sqrt{3}$ ，

$\because b = \sqrt{3}$ ， $\therefore$  椭圆的短轴长为  $2\sqrt{3}$ ，故 A 正确；

则椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，故 C 不正确；

$\because c^2 = a^2 - b^2 = 9$ ， $\therefore c = 3$ ， $\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 B 正确；

椭圆上的一点为  $P(x_0, y_0)$ ，其中一个焦点坐标为  $F(3, 0)$ ，且  $y_0^2 = 3 - \frac{x_0^2}{4}$ ，

则  $|PF|^2 = (x_0 - 3)^2 + y_0^2 = x_0^2 - 6x_0 + 9 + 3 - \frac{x_0^2}{4} = \frac{3}{4}x_0^2 - 6x_0 + 12$  ( $-2\sqrt{3} \leq x_0 \leq 2\sqrt{3}$ )

该抛物线的对称轴为  $x = 4$ ，故函数在区间  $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$  上单调递减，

当  $x_0 = 2\sqrt{3}$  有最小值，此时  $|PF|_{\min}^2 = 21 - 12\sqrt{3} = 3^2 - 12\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3} - 3)^2$ ，

即  $|PF|_{\min} = 2\sqrt{3} - 3$ , 故 D 正确.

故选: ABD.

11. 已知双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $F_2$  作直线与双曲线  $C$  的右支交于  $A, B$

两点, 若  $\angle F_1AB = 90^\circ$ , 则 ( )

A.  $|AF_2| = \sqrt{5} - 1$

B. 点 A 的横坐标为  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

C. 直线  $AF_1$  的斜率  $k = \pm \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

D.  $\triangle ABF_1$  的内切圆的面积  $S = (6 - 2\sqrt{5})\pi$

【答案】 ABD

【解析】

【分析】 根据双曲线的定义得到方程组, 求出  $|AF_1|, |AF_2|$ , 即可判断 A, 再由等面积法求出  $|y_A|$ , 代入双曲线方程求出  $x_A$ , 即可判断 B, 再求出直线的斜率, 即可判断 C, 利用直角三角形即内切圆的性质求出内切圆的半径, 即可判断 D

详解】 由双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  可得  $a^2 = 1, b^2 = 2, c^2 = 3$ ,

如图所示, 由题意知  $\begin{cases} |AF_1| - |AF_2| = 2a = 2 \\ |F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{3} \\ |AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} |AF_1| = \sqrt{5} + 1 \\ |AF_2| = \sqrt{5} - 1 \end{cases}$ , 故 A 正确;

在  $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$  中, 由等面积法知  $\frac{1}{2}|AF_1||AF_2| = \frac{1}{2}|F_1F_2||y_A|$ , 解得  $|y_A| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,

代入双曲线方程得  $x_A^2 = 1 + \frac{y_A^2}{2} = \frac{5}{3}$ , 又因为点 A 在双曲线的右支上, 故  $x_A = \frac{\sqrt{15}}{3}$ , 故 B 正确;

由图知当点 A 在第一象限,  $k_{AF_1} = \tan \angle AF_1F_2 = \frac{|AF_2|}{|AF_1|} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ,

由对称性可知, 若点 A 在第四象限, 则  $k_{AF_1} = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ , 故 C 不正确;

设  $\triangle ABF_1$  的内切圆为  $P$ , 圆  $P$  切  $AF_1, AB, BF_1$  于  $E, D, C$ , 连接  $PE, PD, PC$

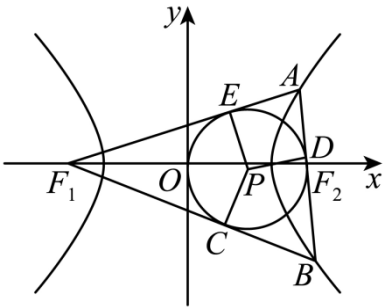
易得  $PE \perp AF_1, PD \perp AB, PC \perp BF_1$ ,  $|PE| = |PD| = |PC|, |AE| = |AD|, |EF_1| = |CF_1|, |BD| = |CB|$ ,



四边形  $ADPE$  是正方形,

故  $\triangle ABF_1$  的内切圆半径  $r = \frac{1}{2}(|AF_1| + |AB| - |BF_1|)$   
 $= \frac{1}{2}(|AF_1| + |AF_2| + |BF_2| - |BF_1|) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} - 1 - 2) = \sqrt{5} - 1,$

对应面积为  $\pi \cdot (\sqrt{5} - 1)^2 = (6 - 2\sqrt{5})\pi$ , 故 D 正确.



故选: ABD

12. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 2AA_1 = 2$ ,  $E, F$  为  $BD_1$  的两个三等分点, 点  $P$  是长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  表面上的动点, 则 ( )

- A.  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最小值为  $\frac{3}{4}$                       B.  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最大值为 2  
 C.  $\angle EPF$  的最小值为  $30^\circ$                       D.  $\angle EPF$  的最大值为  $90^\circ$

【答案】BD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 得到  $E, F$  点的坐标, 分析出  $P$  位于长方体的四个侧面时情况相同,  $P$  位于长方体的上下两个平面时情况相同, 分两种情况进行求解出  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ , 得到最值, 并分析出  $\angle EPF$  的最大值, 举出反例得到 C 错误.

【详解】以  $A$  为坐标原点, 分别以  $AB, AD, AA_1$  为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系,

因为  $AB = BC = 2AA_1 = 2$ , 所以  $B(2, 0, 0), D_1(0, 2, 1)$ ,

不妨设  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$ , 故  $E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ,

由对称性可知:  $P$  位于长方体的四个侧面时, 所处情况相同,

不妨设  $P(0, m, n), m \in [0, 2], n \in [0, 1]$ ,

则  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} - m, \frac{1}{3} - n\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} - m, \frac{2}{3} - n\right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{9} - 2m + m^2 + \frac{2}{9} - n + n^2$

$$= (m-1)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

故当  $m=1, n=\frac{1}{2}$  时,  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最小值为  $\frac{3}{4}$ , 此时

当  $m=0$  或  $2, n=0$  或  $1$  时,  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最大值为  $2$ ,

由对称性可知:  $P$  位于长方体的上下两个平面时, 所处情况相同,

不妨设  $P(s, t, 0), s \in [0, 2], t \in [0, 2]$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} &= \left(\frac{4}{3} - s, \frac{2}{3} - t, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - s, \frac{4}{3} - t, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} - 2s + s^2 + \frac{8}{9} - 2t + t^2 + \frac{2}{9} \\ &= (s-1)^2 + (t-1)^2, \end{aligned}$$

故当  $s=1, t=1$  时,  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最小值为  $0$ ,

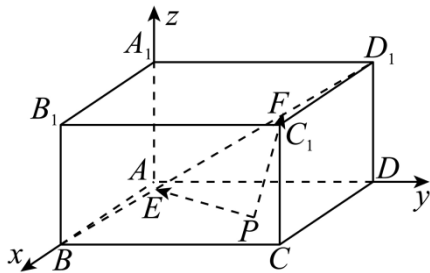
当  $s=0$  或  $2, t=0$  时,  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最大值为  $2$ ,

综上:  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最小值为  $0, \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最大值为  $2$ , A 错误, B 正确;

因为  $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$  的最小值为  $0$ , 故  $\cos \angle EPF$  的最小值为  $0$ ,

因为  $\angle EPF \in [0, \pi]$ , 所以  $\angle EPF$  的最大值为  $90^\circ$ , D 正确;

当点  $P$  与点  $B$  重合时, 此时  $\angle EPF = 0^\circ$ , C 错误.



故选: BD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知直线  $x + y - 2 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 8$  交于 A, B 两点, 则  $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 求出圆心到直线的距离  $d$ , 再由  $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$  计算可得.

【详解】 圆  $x^2 + y^2 = 8$  的圆心坐标为  $(0, 0)$ , 半径  $r = 2\sqrt{2}$ ,

圆心到直线  $x + y - 2 = 0$  的距离  $d = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$ ,

所以  $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$

故答案为:  $2\sqrt{6}$

14. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_n \in \mathbf{Z}$ ,  $a_4 = 1$ ,  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, a_n \text{ 为偶数,} \\ 3a_n + 1, a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$ , 则  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 1 或 8

【解析】

【分析】 根据递推关系, 对  $a_3$  分奇偶即可逐项求解得.

【详解】 ①若  $a_3$  为偶数, 则由  $a_4 = 1$  可得  $a_4 = \frac{a_3}{2} \Rightarrow a_3 = 2$ ,

若  $a_2$  为偶数, 则由  $a_3 = 2$  可得  $a_3 = \frac{a_2}{2} \Rightarrow a_2 = 4$ , 进而  $a_1 = \frac{a_2}{2} \Rightarrow a_1 = 8$  或者  $a_2 = 3a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 1$ , 均满足要求,

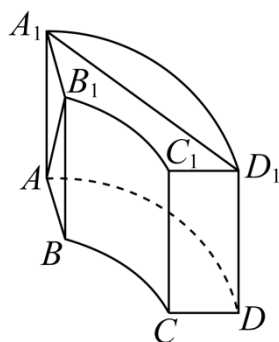
若  $a_2$  为奇数, 则由  $a_3 = 2$  可得  $a_3 = 3a_2 + 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3}$ , 不符合要求, 舍去,

②若  $a_3$  为奇数, 则由  $a_4 = 1$  可得  $a_4 = 3a_3 + 1 \Rightarrow a_3 = 0$ , 不符合要求, 舍去,

综上  $a_1 = 8$  或  $a_1 = 1$ ,

故答案为: 1 或 8

15. 在中国古代数学著作《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体, 该几何体的上下底面平行, 且均为扇环形 (扇环是指圆环被扇形截得的部分). 现有一个如图所示的曲池,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  均与曲池的底面垂直, 且  $AA_1 = 2$ , 每个底面扇环对应的两个圆的半径分别为 1 和 2, 对应的圆心角为  $90^\circ$ , 则直线  $AB_1$  与  $A_1D_1$  所成角的余弦值为\_\_\_\_\_.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/858043032043006023>