理论力学

第七章 动量定理

动力学普遍定理概述

对质点动力学问题： 建立质点运动微分方程求解。

对质点系动力学问题： 理论上讲，n个质点列出3n个微分方程， 联立求解它们即可。

实际上问题是

1、联立求解微分方程(尤其是积分问题)非常困难。

2、大量的问题中，不需要了解每一个质点的运 动,仅需要研究质点系整体的运动情况。

动力学首先讨论动力学普遍定理(包括动量定理、动量矩定理、动能定理及由此推导出来的其它一些定理)。

动力学普遍定理以简明的数学形式，表明两种量 —— 一种是同运动特征相关的量(动量、动量矩、动能等)，一种是同力相关的量(冲量、力 矩、功等) —— 之间的关系，从不同侧面对物体的机械运动进行深入的研究。

本章中研究质点和质点系的动量定理，建立了动量的改变与力的冲量之间的关系，并研究质点系动量定理的另一重要形式——质心运动定理。

第七章　　动量定理

§7－1　质点系的动量

§7－2　动量定理与质心运动定理

§7－3　动量守恒与质心运动守恒

§7－4　变质量质点的运动微分方程

§7-1 质点系的动量

一、质点系的质心

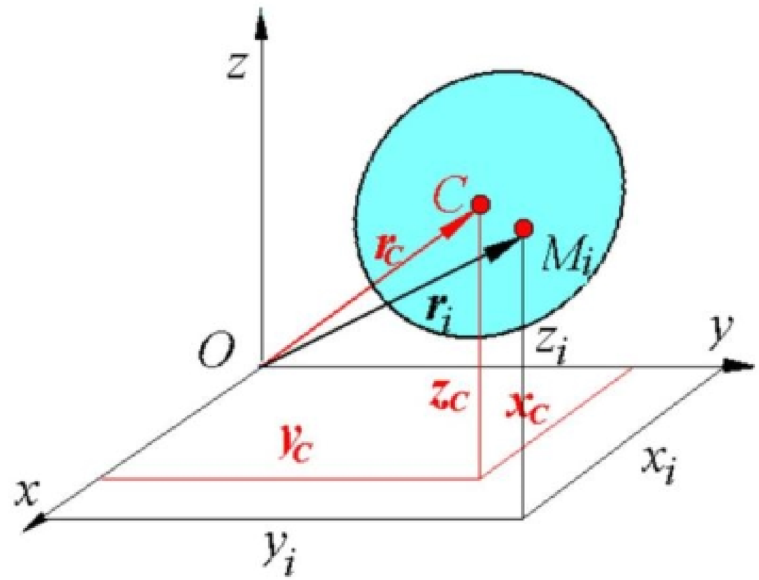
质点系的**质量中心**称**为质心**。是表征质点系质量分布情况的一个重要概念。

在均匀重力场中，质点系的质心与重心的位置重合。可采用静力学中确定重心的各种方法来确定质心的位置。

质心C 点的位置：

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M} \text{ 或 } M\bar{r}_C = \sum m_i \bar{r}_i$$

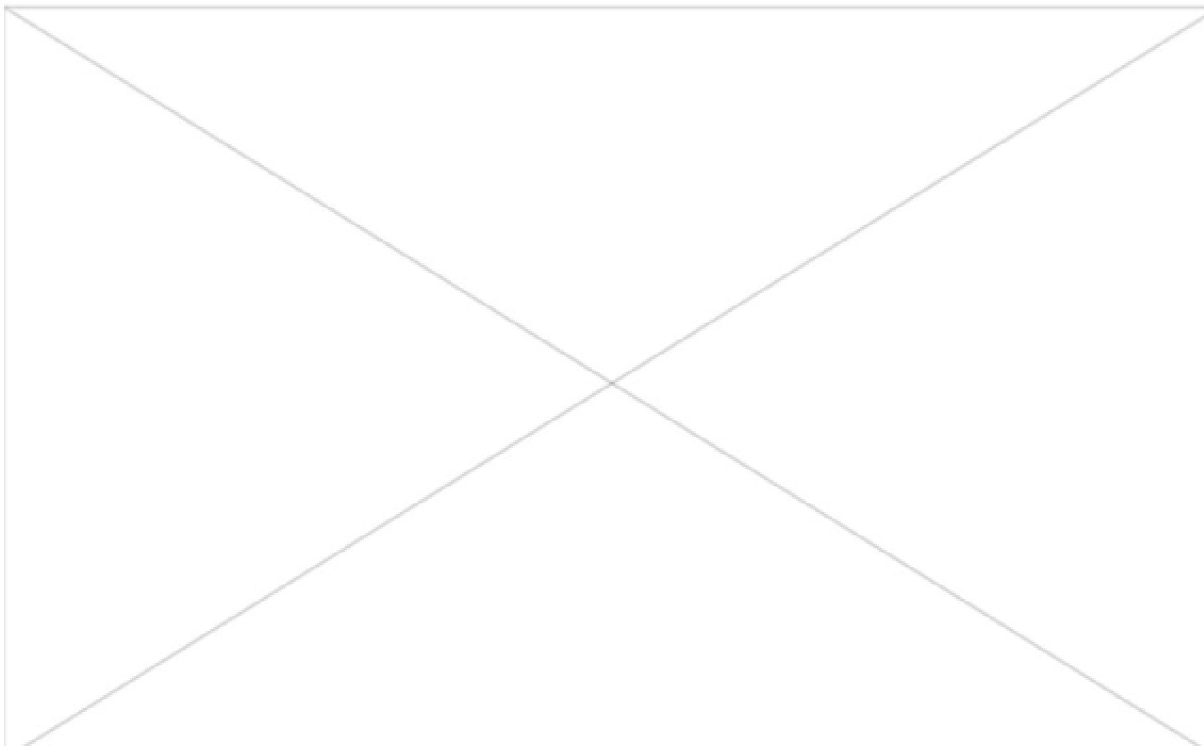
设$\bar{r}_c = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}$,则



$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

（平行力系中心）

例1　曲柄OA以匀角速度ω转动，滑块B沿x轴滑动。若取OA=AB=l,OA及AB皆为均质杆，质量皆为m_1，滑块B的质量为m_2，且$m_1=m_2=m$，求此系统的质心运动方程。



解：设t=0时OA杆水平，则有φ=ωt。

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1 \dfrac{l}{2} + m_1 \dfrac{3l}{2} + 2m_2 l}{2m_1 + m_2} \cos \omega t = \frac{4}{3} l \cos \omega t \\ y_c &= \frac{2m_1 \dfrac{l}{2}}{2m_1 + m_2} \sin \omega t = \frac{1}{3} l \sin \omega t \end{aligned}\right\}$$

消去t 得**轨**迹方程

$$\left(\frac{x_c}{\frac{4}{3}l}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{\frac{1}{3}l}\right)^2 = 1$$

二、质点系的动量

1. **质点的动量**：**质**点的**质**量与速度的乘**积**mv 称**为质**点的**动**量。是瞬时矢量，方向与v 相同。单位是kg·m/s。

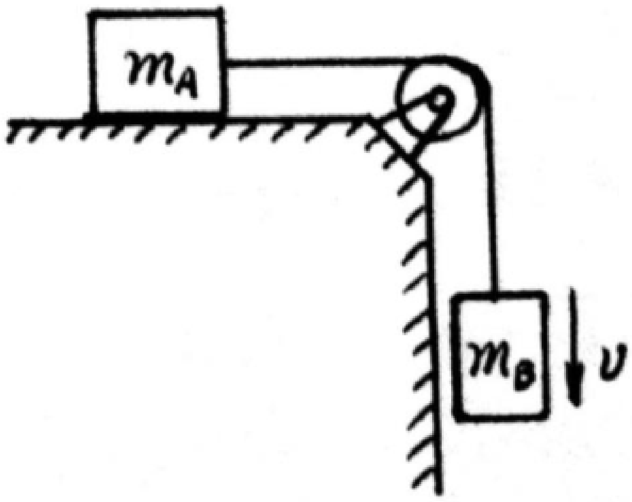
动量是度量物体机械运动强弱程度的一个物理量。

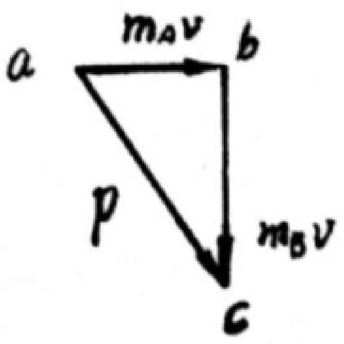
例：枪弹：速度大，质量小；　船：速度小，质量大。

2. 质点系的动量： 质点系中所有各质点的动量的矢量和。

$$\bar{p} = \sum m_i \bar{v}_i$$

例：

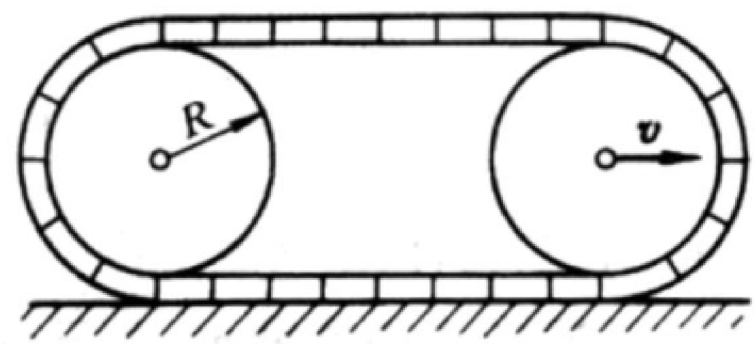




$$\boldsymbol{p} = m_A \boldsymbol{v} + m_B \boldsymbol{v}$$

质点系动量的计算：$\bar{p}=\sum m_i\bar{v}_i=M\bar{v}_C$ （$\sum m_i\bar{r}_i=M\bar{r}_C$ 求导）

如： 坦克的履带质量为m。设坦克前进速度为v，则履带的动量是多少？



答案：$p=mv_C=mv$ 方向：水平向右

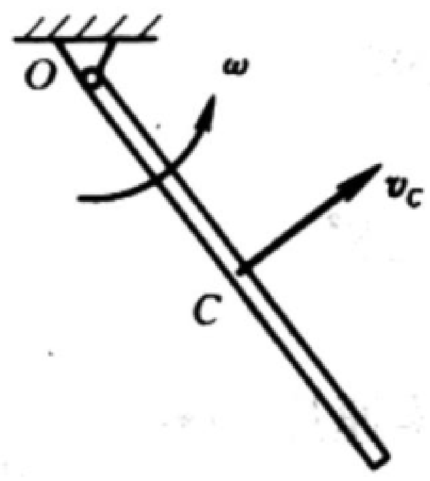
投影形式：

$$p_x=Mv_{Cx}=M\dot{x}_C,\ p_y=Mv_{Cy}=M\dot{y}_C,\ p_z=Mv_{Cz}=M\dot{z}_C$$

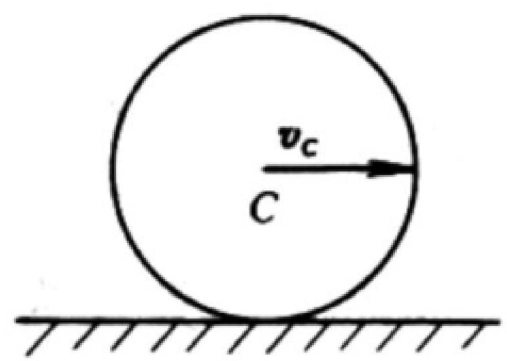
3. 刚体的动量

a.单个刚体： $p=Mv_c$

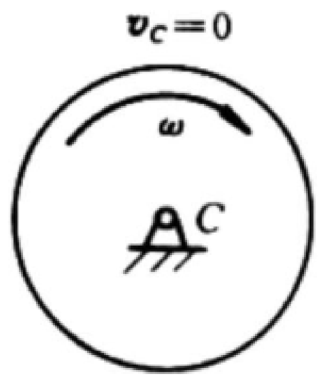
例：



(a)



(b)



(c)

b. 刚体系统的动量：设第i个刚体$m_i, \bar{v}_{ci}$则整个系统：

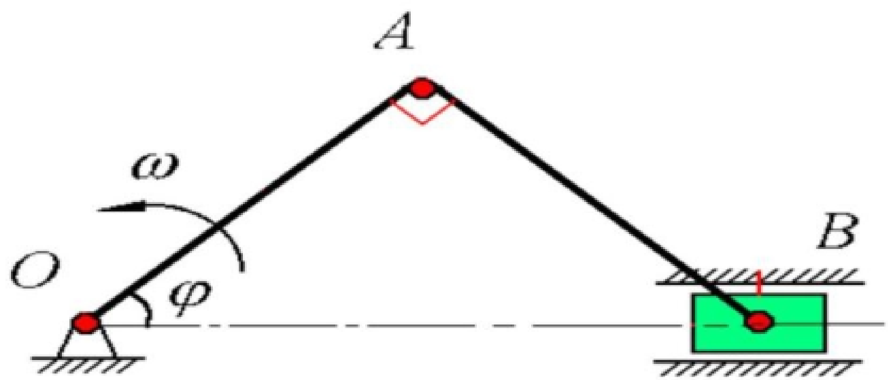
$$\bar{\boldsymbol{p}} = \sum m_i \bar{\boldsymbol{v}}_{Ci}$$

$$p_x = \sum m_i v_{Cix} = \sum m_i \dot{x}_{Ci}$$

$$p_y = \sum m_i v_{Ciy} = \sum m_i \dot{y}_{Ci}$$

$$p_z = \sum m_i v_{Ciz} = \sum m_i \dot{z}_{Ci}$$

例2 曲柄连杆机构的曲柄OA以匀ω 转动，设OA=AB=l ,曲柄OA及连杆AB都是匀质杆,质量各为m ,滑块B的质量也为m。求当φ＝45º时系统的动量。



解法：（1）按 $\overline{\boldsymbol{p}} = \sum m_i \overline{\boldsymbol{v}}_{Ci}$ 求解（2）按 $\overline{\boldsymbol{p}} = M\overline{\boldsymbol{v}}_{C}$ 求解

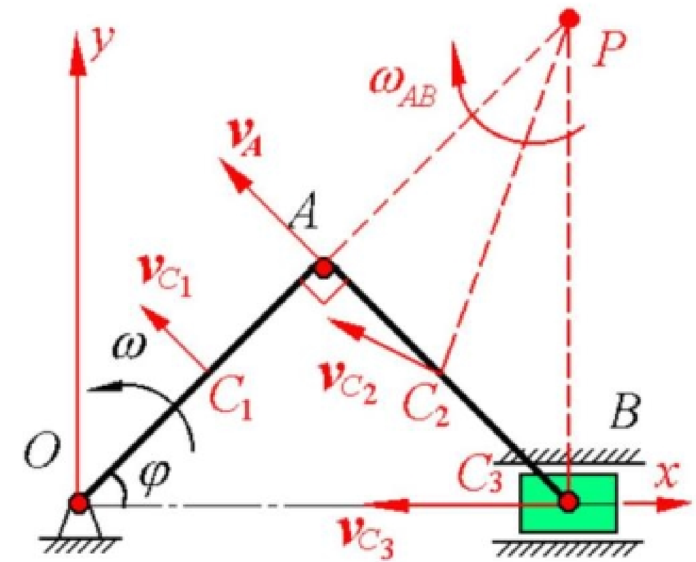
解：（解法一）

曲柄OA： $m\,,v_{C1}=\frac{1}{2}l\omega$

滑块B： $m, v_{C3}=\sqrt{2}l\omega$

连杆AB： $m, v_{C2}=\frac{\sqrt{5}}{2}l\omega_{AB}=\frac{\sqrt{5}}{2}l\omega$

（P为速度瞬心 $PC_2=\frac{\sqrt{5}}{2}l;\omega_{AB}=\omega$ ）



$$\overline{p}=m\overline{v}_{C1}+m\overline{v}_{C2}+m\overline{v}_{C3}$$

$$=m[(-v_{C1}\sin\varphi-v_{C2}\cos\theta-v_{C3})\overline{i}+(v_{C1}\cos\varphi+v_{C2}\sin\theta)\overline{j}]$$

$$=m[(-\frac{1}{2}l\omega\sin45^\circ-\frac{\sqrt{5}}{2}l\omega\cos\theta-\sqrt{2}l\omega)\overline{i}+(\frac{1}{2}l\omega\cos45^\circ+\frac{\sqrt{5}}{2}l\omega\sin\theta)\overline{j}]$$

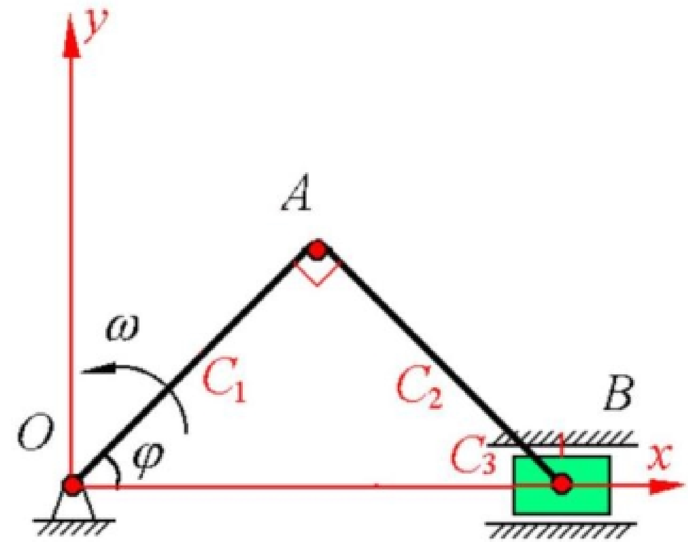
$$=ml\omega[(-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3}{\sqrt{10}}-\sqrt{2})\overline{i}+(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{10}})\overline{j}]$$

$$=\sqrt{2}ml\omega[-2\overline{i}+\frac{1}{2}\overline{j}]$$

解：（解法二）

按 $\overline{\boldsymbol{p}} = M\overline{\boldsymbol{v}}_C$ 求解

系统任意时刻的质心坐标为



$$\left.\begin{aligned}
x_c &= \frac{m_1\dfrac{l}{2} + m_1\dfrac{3l}{2} + 2m_2 l}{2m_1 + m_2}\cos\omega t = \frac{4}{3}l\cos\omega t \\
y_c &= \frac{2m_1\dfrac{l}{2}}{2m_1 + m_2}\sin\omega t = \frac{1}{3}l\sin\omega t
\end{aligned}\right\}$$

质心速度 $$v_{Cx}=\dot{x}_C=\frac{-2(m_1+m_2)}{2m_1+m_2}l\omega\sin\omega t$$

$$v_{Cy}=\dot{y}_C=\frac{m_1}{2m_1+m_2}l\omega\cos\omega t$$

系统的动量沿x、y轴的投影

$$p_x=Mv_{Cx},p_y=Mv_{Cy}$$

由于 $M=\sum m_i=2m_1+m_2$

故 $$p_x=-2(m_1+m_2)l\omega\sin\omega t$$

$$p_y=m_1l\omega\cos\omega t$$

将 $m_1=m_2=m_3=m$，$\varphi = \omega t = 45^o$ 代入

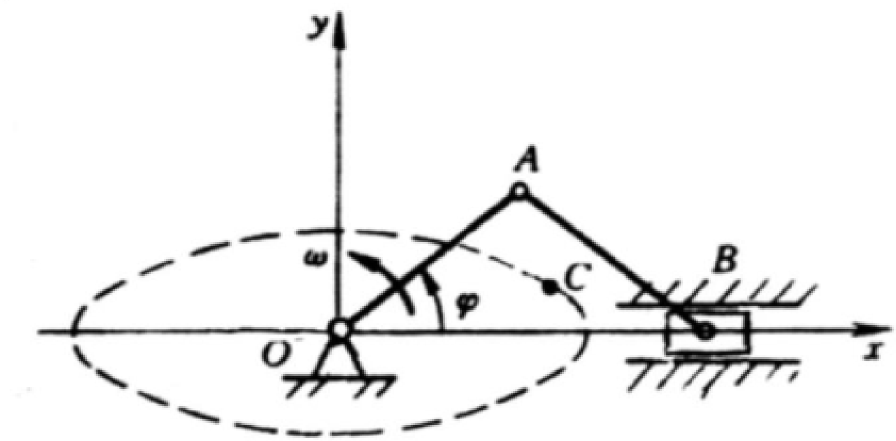
$$p_x = -2(m_1+m_2)l\omega\sin\omega t = -2\sqrt{2}ml\omega$$

$$p_y = m_1 l\omega\cos\omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}ml\omega$$

系统的动量为

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \sqrt{2}ml\omega[-2\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}]$$

动量的方向沿质心轨迹的切线方向。



三. 冲量:力与其作用**时间**的乘**积**称**为**力的冲量

1. 力$\overline{F}$ 是常矢量: $\overline{I}=\overline{F}(t_2-t_1)$

2. 力$\overline{F}$ 是变矢量: （包括大小和方向的变化）

元冲量: $d\overline{I}=\overline{F}dt$

冲量: $\overline{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overline{F}dt$

3. 合力的冲量：等于各分力冲量的矢量和.

$$\overline{I}=\int_{t_1}^{t_2}\overline{R}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum\overline{F}\cdot dt=\sum\int_{t_1}^{t_2}\overline{F}dt=\sum\overline{I}_i$$

冲量的单位: $\mathrm{N\cdot s}=\mathrm{kg\cdot m/s^2\cdot s}=\mathrm{kg\cdot m/s}$ 与动量单位同.

§7-2　动量定理与质心运动定理

一. 质点的动量定理

$$\because m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \qquad \therefore \boxed{\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}}$$

质点的动量对时间的导数等于作用于质点的力——**质点的动量定理**

二. 质点系的动量定理

对质点系内任一质点i，

$$\frac{d}{dt}(m_i\bar{v}_i) = \bar{F}_i^{(i)} + \bar{F}_i^{(e)}$$

对整个质点系：

$$\sum \frac{d}{dt}(m_i \overline{v}_i) = \sum \overline{F}_i^{(i)} + \sum \overline{F}_i^{(e)}$$

外力：所考察的质点系以外的物体作用于该质点系中各质点的力。

内力：所考察的质点系内各质点之间相互作用的力。

对整个质点系来讲，内力系的主矢恒等于零，内力系对任一点（或轴）的主矩恒等于零。即：

$$\sum \overline{F}_i^{(i)} = 0;\ \ \sum \overline{m}_O(\overline{F}_i^{(i)}) = 0 \quad \text{或} \quad \sum m_x(\overline{F}_i^{(i)}) = 0。$$