

## 第二次天枢杯线上联考一试

### 数学

本试卷共 5 页，20 题。全卷满分 150 分，考试用时 120 分钟，

注意事项：

1. 填空题，主观题请自备答题纸。并将答案提交到对应的答题区。请保持字迹工整。笔记清晰。字迹不清，提交错误的作答视为无效。
2. 考试期间，请考生独立作答，禁止考生查网书籍、使用计算器等辅助工具、或在考试期间与他人交流。试卷在考试期间禁止外传，考试结束后可以外传，但最好留下作者名称 skyhgzh.
3. 请使用高中课内知识答题，课外“超纲”知识请在答题纸上给出相应定理的证明，如果题目中不涉及复数的相关内容，则默认范围为实数。自然数默认包含，正整数用  $\mathbb{Z}^+$  表示，不建议使用如“趋近于，足够大”等模糊性词语
4. 考试结束后。请在规定时间内以雨课堂或 QQ 私信 (QQ: 10691923) 的途径，将答题纸以电子版，照片或扫描的方式在雨课堂的相应位置处提交，未在规定时间内发送的卷子视为未提交，不计入成绩。
5. 本比赛的最终解释权归作者所有。考试期间如对试卷内容等方面有问题，请先通读试题内容，如仍有疑问，请私信作者。
6. 题目顺序不代表难度，部分题目可能难度较高！

7. 已知：若  $a, b, c$  均为非负实数，则  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ 。取等当且仅当  $a = b = c$

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知：哥德巴赫猜想认为任一大于 2 的偶数都可写成两个质数之和。定义  $P$  为全体素数的集合，那么以下形式化命题中和哥德巴赫猜想不等价的是( )

A.  $\neg \exists n_0 \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty), \forall p_1 \in P, \forall p_2 \in P, p_1 + p_2 \neq 2n_0$

B.  $\{p_1 + p_2 \mid p_1 \in P, p_2 \in P\} \Rightarrow \{2n \mid n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)\}$

C.  $\{x \mid p_1 \in P, p_2 \in P, x = p_1 + p_2 \text{ 且 } \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

D.  $\forall m \in \mathbb{N}, (m < 2 \text{ 或 } P \cap \{2m - p \mid p \in P\} \neq \emptyset)$

2. 设复数  $z = 1 + 0.2i$ ， $w = z^8$ 。那么如下说法中错误的是( )

A.  $|w| < 1.16$

B.  $w$  在第二象限

C. 若  $f(x) = (5x - 4)^2$ , 那么  $f(z) = 2i$     D.  $\frac{\overline{w} - 1}{w} \in \mathbb{Q}$

3. 称数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  “同增减”, 如果  $\forall n \in \mathbb{Z}, (a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_n) \geq 0$  那么以下说法中正确的是(    )

- A. 两个单调递增数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  是同增减的
- B.  $\forall c \in \mathbf{R}$  和任意数列  $\{a_n\}$ , 有  $\{a_n\}$  和  $\{b_n = ca_n\}$  同增减
- C.  $\forall c \in \mathbf{R}$  和任意数列  $\{a_n\}$ , 有  $\{a_n\}$  和  $\{b_n = c + a_n\}$  同增减
- D.  $\forall c \in \mathbf{R}^+$  和任意正数数列  $\{a_n\}$ , 有  $\{a_n\}$  和  $\{b_n = a_n^c\}$  同增减

→ → → →

4. 已知平面上四个点  $A, B, C, D$ , 其中任意三个不共线. 若  $AB \cdot AD = AC \cdot AD$ , 则直线  $AD$  一定经过三角形  $ABC$  的 ( )

- A. 外心                      B. 内心                      C. 重心                      D. 垂心

5. 已知椭圆  $r: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a^2 > 0, b^2 > 0, a^2 \neq b^2)$  过点  $(1, 1)$ , 其右顶点  $A$ , 上顶点  $B$ . 那么以下说法正确的是 ( )

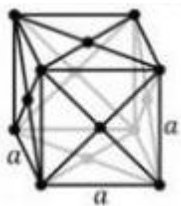
A. 设  $c$  是半焦距  $O$  到  $\Gamma$  的其中一个焦点的距离, 那么必然有  $c^2 < a^2$

B.  $O$  到直线  $AB$  的距离  $d_{O-AB}$  不是定值

C.  $\Gamma$  和  $x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4}$  没有交点

D. 三角形  $OAB$  面积的取值范围是  $[1, +\infty)$

6. 如下图所示, 边长为  $a$  的正方体成周期性排列, 在正方体的各个角以及每个面的中心有原子分布的晶体结构, 我们称之为面心立方结构.  $\text{Ca}$  和  $\text{Al}$  等部分金属就属于这种结构. 若将原子认为是如此分布的等大实心球, 使得最近的两个原子球恰好相切, 那么一个边长为  $a$  的面心立方正方体品格内被原子球所占据的部分的体积是 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^3$                       B.  $\frac{\sqrt{2}\pi}{6} a^3$                       C.  $\frac{7\sqrt{2}}{12} \pi a^3$                       D.  $\frac{\pi}{6} a^3$

7. 仍然考虑上面的图形, 若要将这一个立方体上的 14 个点染上红黄蓝三种颜色, 使得被一条线段连接的两个点不能染上同一种色, 那么不同染色方案的种数是 (旋转和镜像对称后重合的视为同一种) ( )

- A. 3                                      B. 6                                      C. 9                                      D. 12

8. 已知:  $a = \frac{\ln 7}{\ln 2}$ ,  $b = 2.8$ ,  $c = e^{1.02}$ , 那么  $a, b, c$  三者的关系是 ( )

A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $c < b < a$       D.  $b < c < a$

9. 不是方程  $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$  的解的选项是 (    )

- A.  $\cos \frac{1\tau}{9}$       B.  $\cos \frac{4\tau}{9}$       C.  $\cos \frac{5\tau}{9}$       D.  $\cos \frac{7\tau}{9}$

10. 我们称两个正整数  $a$  和  $b$  互素, 当且仅当  $a$  和  $b$  的最大公因数是 1, 我们定义  $\varphi(n)$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) 是小于  $n$  的正整数中和  $n$  互素的数的个数, 例如  $\varphi(6) = 2$ . 是因为小于 6 的数中只有 1 与 5 和 6 互素. 那么以下说法错误的是 ( )

- A. 有无限多个正整数  $n$  使  $\varphi(n) > \frac{n}{2}$       B. 有无限多个正整数  $n$  使  $\varphi(n) < \frac{n}{2}$   
 C.  $\varphi(n) = 1$  的解只有 1 和 2      D. 对于任意正整数  $n$ , 都有  $m$  使得  $\varphi(m) = n$

**二、填空题: 本题共 5 小题. 每小题 6 分, 共 30 分**

11. 定义  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . 那么  $\text{sinc}(x)$  在  $(0, \tau)$  上的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 已知在平面  $xOy$  上  $y = \sin x$  和单位圆交于  $P(x_0, y_0)$ , 那么  $\frac{\text{sinc}(x)}{\tan(x)}$  的可能取值是 (sinc 函数的定义见上)

\_\_\_\_\_.

13. 若,  $\text{sinc}(\tau \ln(x)) = 0$  ( $x > 1$ ) 的解从小到大排成  $a_1, a_2, \dots$  那么若  $S_{100} = a_1 + \dots + a_{100}$ . 则  $\ln(S_{100}) + \frac{3}{5}$  的整数部分是\_\_\_\_\_.

14. 已知三角形  $ABC$  中  $A$  是直角,  $\overline{DA} = \lambda \overline{CA}$  ( $1 > \lambda > 0$ ), 若当  $\frac{b}{c}$  变化时  $\text{sinc}(\angle DBC)$  的最小值是

$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ . 那么  $\lambda$  的可能取值是\_\_\_\_\_.

15. 定义  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$  ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) 那么以下说法正确的有 (填序号) \_\_\_\_\_.

A.  $a_5 = 1809$

B. 除了  $a_1$  以外,  $a_n$  都是奇数

C. 对于任意的  $n$ ,  $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$

D. 以  $2a_n - 1$ ,  $2a_{n+1} - 2$ ,  $2a_{n+1} - 1$  为三边的三角形是直角三角形

**三、解答题: 本题共 5 小题共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或者演算步骤.**

16. (13 分)

信息熵描述了一个事情的不确定度，或者说我知道某个信息所减少的不确定度。此处“度”代表我们可以度量不同的信息中“信息”的含量多少，熵的概念在信息学和通信领域用处颇多，若有一系列基本事件，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/858075102042006120>