

山西省朔州市怀仁八中 2024 届高三六校第一次联考数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^2\right)^5$ 的展开式中，常数项为（ ）

- A. -80 B. 80 C. -160 D. 160

2. 已知 m, n 为两条不重合直线， α, β 为两个不重合平面，下列条件中， $\alpha \perp \beta$ 的充分条件是（ ）

- A. $m \parallel n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ B. $m \parallel n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
C. $m \perp n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

3. 一个圆锥的底面和一个半球底面完全重合，如果圆锥的表面积与半球的表面积相等，那么这个圆锥轴截面底角的大小是（ ）

- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

4. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ，若 $F(x) = f(x) - 3kx^2$ 有 2 个零点，则实数 k 的取值范围为（ ）

- A. $\left(-\frac{1}{6e^2}, 0\right)$ B. $\left(-\frac{1}{6e}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{6e}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{6e^2}\right)$

5. 如图所示的“数字塔”有以下规律：每一层最左与最右的数字均为 2，除此之外每个数字均为其两肩的数字之积，则该“数字塔”前 10 层的所有数字之积最接近 $(\lg 2 \approx 0.3)$ （ ）

2
2 2
2 4 2
2 8 8 2
2 16 64 16 2
.....

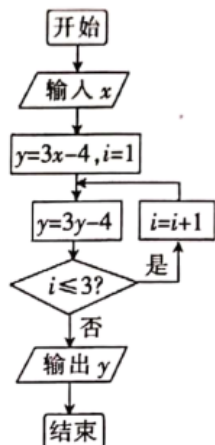
- A. 10^{300} B. 10^{400} C. 10^{500} D. 10^{600}

6. 在复平面内，复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 对应向量 $\vec{OZ}$ (O 为坐标原点)，设 $|\vec{OZ}| = r$ ，以射线 Ox 为始边， OZ 为终边旋转的角为 θ ，则 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，法国数学家棣莫弗发现了棣莫弗定理： $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ， $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ，则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ ，由棣莫弗定理可以导出复数乘方公式：

$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$, 已知 $z = (\sqrt{3} + i)^4$, 则 $|\bar{z}| =$ ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $8\sqrt{3}$ D. 16

7. 明代数学家程大位(1533~1606年),有感于当时筹算方法的不便,用其毕生心血写出《算法统宗》,可谓集成计算的鼻祖.如图所示的程序框图的算法思路源于其著作中的“李白沽酒”问题.执行该程序框图,若输出的 y 的值为2,则输入的 x 的值为()



- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{56}{27}$ C. 2 D. $\frac{164}{81}$

8. 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1$ 交于 A, B 两点, 焦点 $F(0, -c)$, 其中 c 为半焦距, 若 $\triangle ABF$ 是直角三角形, 则该椭圆的离心率为()

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

9. 过双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 作双曲线 C 的一条弦 AB , 且 $\vec{FA} + \vec{FB} = \vec{0}$, 若以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点, 则双曲线 C 的离心率为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

10. 已知定点 A, B 都在平面 α 内, 定点 $P \notin \alpha, PB \perp \alpha, C$ 是 α 内异于 A, B 的动点, 且 $PC \perp AC$, 那么动点 C 在平面 α 内的轨迹是()

- A. 圆, 但要去掉两个点 B. 椭圆, 但要去掉两个点
C. 双曲线, 但要去掉两个点 D. 抛物线, 但要去掉两个点

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是边 BC 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿着 AM 翻折成 $\triangle A'B'C'$, 且点 A' 不在平面 $B'C'M$ 内, 点 P 是线段 $A'B'$ 上一点. 若二面角 $P-BC'-M$ 与二面角 $A'-BC'-M$ 的平面角相等, 则直线 PM 经过 $\triangle A'B'C'$ 的()



A. $[-5, 7)$ **B.** $[-3, 7)$ **C.** $(-3, 7)$ **D.** $(-5, 7)$

13. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 99$, $a_2 + a_5 + a_8 = 93$, 若对任意 $n \in N^*$ 都有 $S_n \leq S_k$ 成立, 则 k 的值为_____.

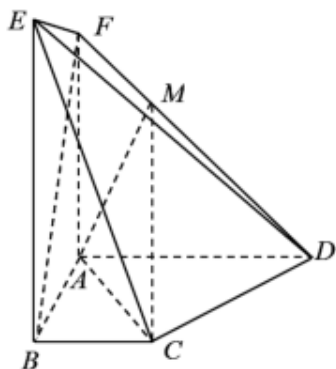
15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - 2y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

17. (12分) 已知抛物线 $C: x^2 = 4py$ (p 为大于 2 的质数) 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线交 C 于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 E , 抛物线 C 在点 A, B 处的切线相交于点 G . 记四边形 $AEBG$ 的面积为 S .

(2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, $c = 7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12 分) 已知六面体 $ABCDEF$ 如图所示, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $BE \parallel AF$, $AD \parallel BC$, $BC = 1$, $CD = \sqrt{5}$,

$AB = AF = AD = 2$, M 是棱 FD 上的点, 且满足 $\frac{FM}{MD} = \frac{1}{2}$.



(1) 求证: 直线 $BF \parallel$ 平面 MAC ;

(2) 求二面角 $A-MC-D$ 的正弦值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = |x + a| + |2x - 5|$ ($a > 0$).

(1) 当 $a = 2$ 时, 解不等式 $f(x) \geq 5$;

(2) 当 $x \in [a, 2a - 2]$ 时, 不等式 $f(x) \leq |x + 4|$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

求出二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^2\right)^5$ 的展开式的通式, 再令 x 的次数为零, 可得结果.

【详解】

解: 二项式 $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^2\right)^5$ 展开式的通式为 $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{5-r} (-x^2)^r = (-1)^r C_5^r 2^{5-r} x^{-\frac{5-r}{2} + 2r}$,

令 $-\frac{5-r}{2} + 2r = 0$, 解得 $r = 1$,

则常数项为 $(-1)^1 C_5^1 2^4 = -80$.

故选: A.

【点睛】

本题考查二项式定理指定项的求解, 关键是熟练应用二项展开式的通式, 是基础题.

2、D

【解析】

根据面面垂直的判定定理, 对选项中的命题进行分析、判断正误即可.

【详解】

对于 A, 当 $m \parallel n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$ 时, 则平面 α 与平面 β 可能相交, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \parallel \beta$, 故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件, 故 A 错误;

对于 B, 当 $m \parallel n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$ 时, 则 $\alpha \parallel \beta$, 故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件, 故 B 错误;

对于 C, 当 $m \perp n$, $m \parallel \alpha$, $n \parallel \beta$ 时, 则平面 α 与平面 β 相交, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \parallel \beta$, 故不能作为 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件, 故 C 错误;

对于 D, 当 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则一定能得到 $\alpha \perp \beta$, 故 D 正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查了面面垂直的判断问题, 属于基础题.

3、D

【解析】

设圆锥的母线长为 l , 底面半径为 R , 再表达圆锥表面积与球的表面积公式, 进而求得 $l = 2R$ 即可得圆锥轴截面底角的大小.

【详解】

设圆锥的母线长为 l , 底面半径为 R , 则有 $\pi R^2 + \pi Rl = \pi R^2 + 2\pi R^2$, 解得 $l = 2R$, 所以圆锥轴截面底角的余弦值是

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{2}, \text{底角大小为 } 60^\circ.$$

故选: D

【点睛】

本题考查圆锥的表面积和球的表面积公式, 属于基础题.

4、C

【解析】

令 $F(x) = f(x) - 3kx^2 = 0$ ，可得 $k = \frac{\ln x}{3x^2}$ ，要使得 $F(x) = 0$ 有两个实数解，即 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，结合已知，即可求得答案.

【详解】

令 $F(x) = f(x) - 3kx^2 = 0$ ，

可得 $k = \frac{\ln x}{3x^2}$ ，

要使得 $F(x) = 0$ 有两个实数解，即 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，

Q $g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{3x^3}$ ，

令 $1 - 2\ln x = 0$ ，

可得 $x = \sqrt{e}$ ，

∴ 当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增；

当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减.

∴ 当 $x = \sqrt{e}$ 时， $g(x)_{\max} = \frac{1}{6e}$ ，

∴ 若直线 $y = k$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{3x^2}$ 有两个交点，则 $k \in \left(0, \frac{1}{6e}\right)$.

∴ 实数 k 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{6e}\right)$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了根据零点求参数范围，解题关键是掌握根据零点个数求参数的解法和根据导数求单调性的步骤，考查了分析能力和计算能力，属于中档题.

5、A

【解析】

结合所给数字特征，我们可将每层数字表示成 2 的指数的形式，观察可知，每层指数的和成等比数列分布，结合等比数列前 n 项和公式和对数恒等式即可求解

【详解】

如图，将数字塔中的数写成指数形式，可发现其指数恰好构成“杨辉三角”，前 10 层的指数之和为

$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^{10}-1=1023$ ，所以原数字塔中前 10 层所有数字之积为 $2^{1023}=10^{1023\lg 2}\approx 10^{300}$ 。

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2^1 & & & & \\ & 2^1 & & 2^1 & & & \\ 2^1 & & 2^2 & & 2^1 & & \\ 2^1 & 2^3 & & 2^3 & & 2^1 & \\ 2^1 & 2^4 & 2^6 & 2^4 & 2^1 & & \\ & \cdots & & & & & \end{array}$$

故选：A

【点睛】

本题考查与“杨辉三角”有关的规律求解问题，逻辑推理，等比数列前 n 项和公式应用，属于中档题

6、D

【解析】

根据复数乘方公式： $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ，直接求解即可。

【详解】

$$\begin{aligned} z &= (\sqrt{3} + i)^4 = \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right]^4 = 16 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^4 \\ &= 16 \left[\cos \left(4 \times \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(4 \times \frac{\pi}{6} \right) \right] = -8 + 8\sqrt{3}i, \\ |\bar{z}| &= \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16. \end{aligned}$$

故选：D

【点睛】

本题考查了复数的新定义题目、同时考查了复数模的求法，解题的关键是理解棣莫弗定理，将复数化为棣莫弗定理形式，属于基础题。

7、C

【解析】

根据程序框图依次计算得到答案。

【详解】

$$y = 3x - 4, \quad i = 1; \quad y = 3y - 4 = 9x - 16, \quad i = 2; \quad y = 3y - 4 = 27x - 52, \quad i = 3;$$

$$y = 3y - 4 = 81x - 160, \quad i = 4; \quad y = 3y - 4 = 243x - 484, \quad \text{此时不满足 } i \leq 3, \text{ 跳出循环,}$$

输出结果为 $243x - 484$ ，由题意 $y = 243x - 484 = 2$ ，得 $x = 2$ 。

故选：C

【点睛】

本题考查了程序框图的计算，意在考查学生的理解能力和计算能力.

8、A

【解析】

联立直线与椭圆方程求出交点 A, B 两点，利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式，解方程求解即可.

【详解】

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1 \end{cases}, \text{解方程可得} \begin{cases} x=0 \\ y=a \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-b \\ y=0 \end{cases},$$

不妨设 $A(0, a), B(-b, 0)$ ，由题意可知， $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ ，

因为 $\overrightarrow{BA} = (b, a), \overrightarrow{BF} = (b, -c)$ ，

由平面向量垂直的坐标表示可得， $b \cdot b - ac = 0$ ，

因为 $b^2 = a^2 - c^2$ ，所以 $a^2 - c^2 = ac$ ，

两边同时除以 a^2 可得， $e^2 + e - 1 = 0$ ，

解得 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去)，

所以该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选：A

【点睛】

本题考查椭圆方程及其性质、离心率的求解、平面向量垂直的坐标表示；考查运算求解能力和知识迁移能力；利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式是求解本题的关键；属于中档题、常考题型.

9、C

【解析】

由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = 0$ 得 F 是弦 AB 的中点. 进而得 AB 垂直于 x 轴，得 $\frac{b^2}{a} = a + c$ ，再结合 a, b, c 关系求解即可

【详解】

因为 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = 0$ ，所以 F 是弦 AB 的中点. 且 AB 垂直于 x 轴. 因为以 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的左顶点，所以

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/858136017125007032>