

武汉市部分重点中学 2023-2024 学年度上学期期末联考

高二数学试卷

命题单位：武汉一中高一数学学科组 审题单位：圆创教育研究中心 湖北省武昌实验中学

本试卷共 6 页，22 题。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考试时间：2024 年 1 月 25 日下午 14:00—16:00

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题所给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 抛物线 $x^2 = -16y$ 的准线方程是（ ）

- A. $y = 8$ B. $y = 4$ C. $y = -8$ D. $y = -4$

【答案】B

【解析】

【分析】直接求解抛物线的准线方程即可。

【详解】对于抛物线 $x^2 = -16y$ ， $p = 8$ 的准线方程是 $y = \frac{8}{2} = 4$ 。

故选：B。

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_n = \frac{2}{n^2 + n}$ ，则 $S_7 =$ （ ）

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{7}{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】直接裂项求和即可得解.

【详解】由题意 $a_n = \frac{2}{n^2 + n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 所以 $S_7 = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = 2 \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{4}$.

故选: C.

3. 若方程 $\frac{x^2}{6-m} + \frac{y^2}{m-4} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $4 < m < 6$ B. $m > 5$ C. $4 < m < 5$ D. $5 < m < 6$

【答案】D

【解析】

【分析】由方程表示焦点在 y 轴上的椭圆列出不等式组求解即可.

【详解】若方程 $\frac{x^2}{6-m} + \frac{y^2}{m-4} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 $m-4 > 6-m > 0$, 解得 $5 < m < 6$.

故选: D.

4. 九连环是中国传统民间智力玩具, 以金属丝制成 9 个圆环, 将圆环套装在横板或各式框架上, 并贯以环柄. 玩时, 按照一定的程序反复操作, 可使 9 个圆环分别解开, 或合二为一. 在某种玩法中, 用 a_n 表示解

下 n ($n \leq 9, n \in \mathbb{N}^*$) 个圆环所需的最少移动次数, $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 2, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n - 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则解下 5

个圆环所需的最少移动次数为 ()

- A. 31 B. 16 C. 14 D. 7

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据递推公式计算即可.

【详解】由 $a_1 = 1$ 可得 $a_2 = 2a_1 + 2 = 4$,

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 7,$$

$$a_4 = 2a_3 + 2 = 16,$$

$$a_5 = 2a_4 - 1 = 31.$$

最少移动次数为 31.

故选：A.

5. 已知双曲线 E 的中心在原点，对称轴为坐标轴，且经过点 $(2,1)$ ， $(4,\sqrt{7})$ ，则下列结论中错误的是()

A. E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

B. E 的离心率等于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. E 与双曲线 $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$ 的渐近线不相同

D. 直线 $x - y - 1 = 0$ 与 E 有且仅有一个公共点

【答案】C

【解析】

【分析】首先待定系数法得 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 可判断 A，进一步可判断 BC，联立直线 $x - y - 1 = 0$

与双曲线 E 的方程 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 即可判断 D.

【详解】对于 A，由题意不妨设 E 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1$ ，

所以有 $\begin{cases} 4m + n = 1 \\ 16m + 7n = 1 \end{cases}$ ，解得 $m = \frac{1}{2}, n = -1$ ，即 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ ，故 A 不符合题意；

对于 B，因为 $a = \sqrt{2}, b = 1$ ，所以 $c = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ ，离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故 B 不符合题意；

对于 C，令 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 0$ ， $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 0$ 都可以得到 $x \pm \sqrt{2}y = 0$ ，即 E 与双曲线 $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$ 的渐近线相

同，故 C 符合题意；

对于 D，联立 $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y 化简并整理得， $x^2 - 4x + 4 = 0$ ，解得 $x = 2$ ， $y = 2 - 1 = 1$ ，

即直线 $x - y - 1 = 0$ 与 E 有且仅有一个公共点，故 D 不符合题意.

故选：C.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n + a_n = 2$ ，设 $b_n = \frac{2(n-\lambda)}{a_n}$ ，若数列 $\{b_n\}$ 是递增数列，则 λ 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, 3)$

C. $(2, +\infty)$

D. $(3, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】先利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再通过 $b_{n+1} - b_n > 0$ 恒成立求 λ 的取值范围.

【详解】由 $S_n + a_n = 2$ 得 $S_{n-1} + a_{n-1} = 2, n \geq 2$,

两式相减得 $a_n + a_n - a_{n-1} = 0$, 即 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$,

又 $S_1 + a_1 = 2$, 得 $a_1 = 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

所以 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $b_n = \frac{2(n-\lambda)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 2^n(n-\lambda)$,

若数列 $\{b_n\}$ 是递增数列

则 $b_{n+1} - b_n = 2^{n+1}(n+1-\lambda) - 2^n(n-\lambda) = 2^n(n+2-\lambda) > 0$ 恒成立,

即 $n+2-\lambda > 0$ 恒成立,

即 $\lambda < n+2$ 恒成立, 又 $n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$,

所以 $\lambda < 3$.

故选: B.

7. 已知抛物线 $y^2 = x$ 的焦点为 F , 过点 $A(1, 0)$ 的直线交抛物线于 M, N 两点, 直线 MF, NF 分别于抛

物线交于点 P, Q . 设直线 MN, PQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $\frac{k_2}{k_1} = (\quad)$

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】A

【解析】

【分析】因为 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 设 $M(y_1^2, y_1), N(y_2^2, y_2), P(y_3^2, y_3), Q(y_4^2, y_4)$, MF 的方程为

$x = m_0 y + \frac{1}{2}$, 通过联立直线与抛物线解得 P 的纵坐标, 同理得到 Q 的纵坐标, 再根据斜率公式得到

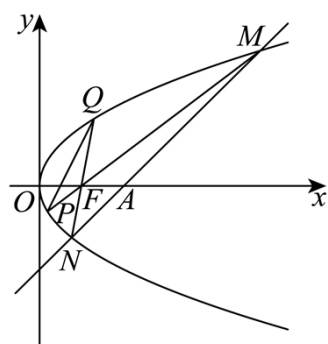
k_1, k_2 , 整理得 $\frac{k_2}{k_1} = -2y_1y_2$, 设直线 MN 为 $x = my + 1$, 联立方程结合韦达定理可得答案.

【详解】抛物线 $y^2 = x$ 的焦点为 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

由题意可知: 可知直线 MF, NF, MN 与抛物线必相交,

设 $M(y_1^2, y_1)$, $N(y_2^2, y_2)$, $P(y_3^2, y_3)$, $Q(y_4^2, y_4)$,

$$\text{则 } k_1 = \frac{y_2 - y_1}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{1}{y_1 + y_2}, k_2 = \frac{y_3 - y_4}{y_3^2 - y_4^2} = \frac{1}{y_3 + y_4},$$



设 MF 的方程为 $x = m_0y + \frac{1}{2}$,

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x = m_0y + \frac{1}{2} \\ y^2 = x \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 并整理得 } y^2 - m_0y - \frac{1}{2} = 0,$$

根据韦达定理得 $y_1y_3 = -\frac{1}{2}$, 即 $y_3 = -\frac{1}{2y_1}$,

$$\text{同理可得 } y_4 = -\frac{1}{2y_2}, \text{ 则 } k_2 = \frac{1}{-\frac{1}{2y_1} - \frac{1}{2y_2}} = -\frac{2y_1y_2}{y_1 + y_2},$$

$$\text{可得 } \frac{k_2}{k_1} = \frac{-\frac{2y_1y_2}{y_1 + y_2}}{\frac{1}{y_1 + y_2}} = -2y_1y_2,$$

设直线 MN 为 $x = my + 1$,

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = x \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 并整理得 } y^2 - my - 1 = 0,$$

根据韦达定理得 $y_1 y_2 = -1$ ，所以 $\frac{k_2}{k_1} = -2y_1 y_2 = 2$ 。

故选：A.

8. 设直线 $2x - y + m = 0 (m \neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于点 M, N ，若点 $D(4m, 0)$ 满足 $|DM| = |DN|$ ，则该双曲线的渐近线方程为 ()

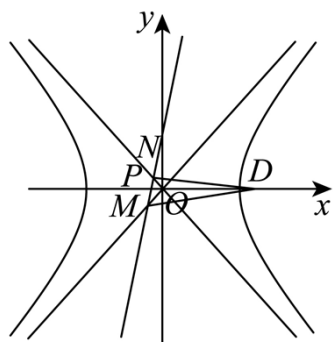
- A. $y = \pm 3x$ B. $y = \pm 2\sqrt{2}x$ C. $y = \pm \sqrt{6}x$ D. $y = \pm \sqrt{5}x$

【答案】A

【解析】

【分析】联立方程组求出交点，再利用中点坐标公式求出中点坐标，依据等腰三角形三线合一推出垂直，建立齐次方程求解即可。

【详解】因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，



联立方程组 $2x - y + m = 0, y = \frac{b}{a}x$ ，解得 $x = \frac{ma}{b-2a}, y = \frac{mb}{b-2a}$ ，故 $M\left(\frac{ma}{b-2a}, \frac{mb}{b-2a}\right)$ ，

联立方程组 $2x - y + m = 0, y = -\frac{b}{a}x$ ，解得 $x = \frac{-ma}{b+2a}, y = \frac{mb}{b+2a}$ ，故 $N\left(\frac{-ma}{b+2a}, \frac{mb}{b+2a}\right)$ ，

设 P 为 MN 的中点，由中点坐标公式得 $P\left(\frac{2ma^2}{b^2-4a^2}, \frac{mb^2}{b^2-4a^2}\right)$ ，

由题意得 $|DM| = |DN|$ ，故 $MN \perp DP$ ，

则 $k_{MN} \cdot k_{DP} = -1$ ，可得 $2 \times \frac{\frac{mb^2}{b^2-4a^2}}{\frac{2ma^2}{b^2-4a^2} - 4m} = -1$ ，

化简得 $9a^2 = b^2$ ，即 $\frac{b}{a} = 3$ ，

故渐近线方程为 $y = \pm 3x$ 。

故选：A

【点睛】易错点睛：双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，而双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x$ (即 $x = \pm \frac{b}{a}y$)，应注意其区别与联系。

二、多项选择题 (本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的不得分)

9. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{3}$ ，若直线 $y = kx$ 与椭圆的一个交点的横坐标 $x_0 = b$ ，则 k 的值

可以为 ()

A. $-\frac{1}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】AD

【解析】

【分析】联立直线与椭圆得 $(a^2k^2 + b^2)x^2 = a^2b^2$ ，再根据条件即可得出结果。

【详解】由 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases}$ ，消 y 得到 $(a^2k^2 + b^2)x^2 = a^2b^2$ ，

由题有 $(a^2k^2 + b^2)b^2 = a^2b^2$ ，解得 $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ，又 $a^2 = b^2 + c^2$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ ，

得到 $k^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{9}$ ，所以 $k = \pm \frac{1}{3}$ ，

故选：AD。

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$)，前 n 项积为 T_n ，若 $a_9 > 1$ ， $a_9a_{10} < 1$ ，则 ()

A. $0 < q < 1$

B. $q > 1$

C. $T_{17} > 1 > T_{18}$

D. $T_{18} > 1 > T_{19}$

【答案】AC

【解析】

【分析】先通过条件确定 a_{10} 和 q 的取值情况，然后利用等比数列的性质计算 T_{17}, T_{18}, T_{19} 即可.

【详解】由已知 $a_9 a_{10} = a_9 a_9 q = q a_9^2 < 1$ ，又 $a_9 > 1$ ， $q > 0$ ，

所以 $0 < a_{10} < 1$ ， $0 < q < 1$ ，A 正确，B 错误；

$$T_{17} = (a_1 a_{17})(a_2 a_{16})(a_3 a_{15}) \cdots (a_8 a_{10}) \cdot a_9 = (a_9^2)^8 \cdot a_9 = a_9^{17} > 1,$$

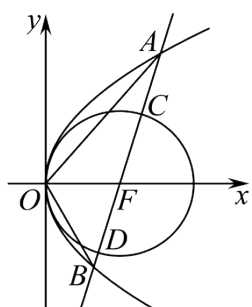
$$T_{18} = (a_1 a_{18})(a_2 a_{17})(a_3 a_{16}) \cdots (a_9 a_{10}) = (a_9 a_{10})^9 < 1,$$

$$T_{19} = (a_1 a_{19})(a_2 a_{18})(a_3 a_{17}) \cdots (a_9 a_{11}) \cdot a_{10} = (a_{10}^2)^9 \cdot a_{10} = a_{10}^{19} < 1,$$

所以 $T_{17} > 1 > T_{18}$ ，C 正确，D 错误.

故选：AC.

11. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ (如图)，过抛物线焦点 F 的直线 l 自上而下，分别交抛物线和圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 于 A, C, D, B 四点，则 ()



A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -12$

B. $|AC| \cdot |BD| = 4$

C. 当直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$ 时， $|AB| \cdot |AF| = \frac{128}{3}$

D. $4|AF| + |BF| \geq 18$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据联立直线方程与抛物线方程，即可得韦达定理，进而由向量的坐标运算即可求解 A，根据焦半径即可求解 BC，结合基本不等式即可求解 D.

【详解】由题意可得 $F(2, 0)$ ，

设直线 l 方程为 $x = ty + 2$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} y^2 = 8x \\ x = ty + 2 \end{cases}, \quad y^2 - 8ty - 16 = 0, \quad \text{所以 } y_1 + y_2 = 8t, y_1 y_2 = -16,$$

对于 A, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{64} + y_1y_2 = 4 - 16 = -12$, 故 A 正确,

对于 B, $|AC| \cdot |BD| = (|AF| - 2) \cdot (|BF| - 2) = (x_1 + 2 - 2) \cdot (x_2 + 2 - 2) = x_1x_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{64} = 4$, B 正确,

对于 C, 当直线 l 斜率为 $\sqrt{3}$ 时, 直线方程为 $y = \sqrt{3}(x - 2)$, 联立直线与抛物线方程可得

$$3x^2 - 20x + 12 = 0,$$

解得 $x_1 = 6, x_2 = \frac{2}{3}$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{20}{3}$,

所以 $|AB| \cdot |AF| = (x_1 + x_2 + 4)(x_1 + 2) = \frac{32}{3} \times 8 = \frac{256}{3}$, 故 C 错误,

对于 D, $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + 4}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$

$$= \frac{(ty_1 + 2) + (ty_2 + 2) + 4}{(ty_1 + 4)(ty_2 + 4)} = \frac{t(y_1 + y_2) + 8}{t^2 y_1 y_2 + 4t(y_1 + y_2) + 16},$$

将 $y_1 + y_2 = 8t, y_1 y_2 = -16$ 代入可得 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{t(y_1 + y_2) + 8}{t^2 y_1 y_2 + 4t(y_1 + y_2) + 16} = \frac{8t^2 + 8}{-16t^2 + 32t^2 + 16} = \frac{1}{2}$,

所以 $4|AF| + |BF| = 2(4|AF| + |BF|) \left(\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} \right) = 10 + \frac{2|BF|}{|AF|} + \frac{8|AF|}{|BF|} \geq 10 + 2\sqrt{16} = 18$,

等号成立当且仅当 $|BF| = 2|AF| = 6$ 时等号成立, 故 D 正确.

故选: ABD.

12. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2, b_1 = \frac{1}{2}$, $\begin{cases} a_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n} \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$, 则下列选项正确的是 ()

A. $\frac{a_4}{b_4} = \frac{1}{4}$

B. $a_{10} + b_{10} = \frac{5}{2}\sqrt{a_{10}b_{10}}$

C. $\{a_{2n}\}$ 为递增数列

D. $a_n b_n \leq 4\sqrt{n}$

【答案】ABC

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/865024324031012033>