

醫用高等數學題庫

第一章 函数与极限

1. 设
$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin(x)| & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$
, 求 $\varphi(\frac{\pi}{6}), \varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{4}), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形。

2. 设
$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$$
, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出這兩個函数的图形。

3. 设 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 。

4. 试证下列函数在指定区间内的單调性：

(1) $y = \lg x, (0, +\infty)$

(2) $y = \sin x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

5. 下列函数中哪些是是周期函数？對於周期函数，指出其周期：

(1) $y = x \cdot \cos x$

(2) $y = \sin^2 x$

6. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ 。试求下列复合函数，并指出 x 的取值范围。

7. 已知对一切实数 x 均有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ ，且 $f(x)$ 为单调增函数，试证：

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$$

8. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

9. (1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = \frac{1}{2}$ ，求常数 a, b 。

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$ ，求 a, b 。

10. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \cdot \sin \frac{x}{2^x} \quad (x \text{ 為不等于零的常数})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} \quad (k \text{ 為正整数})$$

11. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{k \operatorname{ctg} x} \quad (k \text{ 為常数})$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x-1}}{x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(1+x^2)}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{\left(\sin \frac{x}{2} \right)^2}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sec \pi x}{2}}$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sin x \right)$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \cos \sqrt{x}}{1 + x^2}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos 2x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow +0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

12. 當 $x \rightarrow 1$ 時, 無窮小 $1-x$ 和 (1) $1-x^3$ (2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 與否同階? 與否等价?

13. 证明: 當 $x \rightarrow 0$ 時, 有 (1) $\operatorname{arctg} x \sim x$ (2) $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

14. 运用等价无穷小的性质求下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 为正整数})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$$

15. 试确定常数 a ，使下列各函数的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在：

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{1+e^x} & (x < 0) \\ \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \cos 2x} & (x > 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}} & (x < 0) \\ \frac{1}{x} [\ln x - \ln(x^2 + x)] & (x > 0) \end{cases}$$

16. 讨论下列函数的持续性：

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x \cdot \sin x & x > 0 \end{cases} \quad \text{的持续性}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - 1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \text{在 } x=0 \text{ 处的持续性}$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上持续, $f(0) = f(2a)$, 试证方程 $f(x) = f(x+a)$ 在 $[0, a]$ 内至少存在一种实根。

18. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内持续, $a < x_1 < x_2 < b$, 试证: 在开区间 (a, b) 内至少有一点 c , 使得 $t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) = (t_1 + t_2) f(c)$ (其中 $t_1 > 0, t_2 > 0$)。

第二章 导数与微分

1. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的持续性与可导性:

$$(1) \quad y = |\sin x|$$

$$(2) \quad y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. 设 $f'(x)$ 存在, 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+a\Delta x) - f(x-b\Delta x)}{\Delta x}$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + b & (x \leq 0) \\ \sin ax & (x > 0) \end{cases}$, 问 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导?

4. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$, 并问: $f'(0)$ 是否存在?

5. 证明:双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$ 。

6. 问当系数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

7. 求下列各函数的导数:

$$(1) \quad y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(2) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(3) \quad y = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}}{x} + 1\right)$$

$$(4) \quad y = x \cdot \arcsin \ln x$$

$$(5) \quad y = x^2 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

$$(6) \quad y = \sin[\sin(\sin x)]$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$$

$$(8) \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

$$(9) \quad y = 3^x + x^3 + e^{e^x} + e^{x^e} + x^{e^x}$$

$$(10) \quad y = \arccos \frac{1}{x}$$

$$(11) \quad y = \arcsin \sqrt{x}$$

$$(12) \quad y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$(13) \quad y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

$$(14) \quad y = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x)$$

$$(15) \quad y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$$

$$(16) \quad y = \sin^n x \cdot \cos nx$$

$$(17) \quad y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

$$(18) \quad y = \ln[\ln(\ln x)]$$

$$(19) \quad y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$(20) \quad y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(21) \quad y = \operatorname{tg}(e^{-2x} + 1)$$

$$(22) \quad y = 10^{-\sin^2 2x}$$

$$(23) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$(24) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1}$$

8. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在點 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程。

9. 用對数求导法求下列函数的导数：

$$(1) \quad y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$(2) \quad y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{5\sqrt{x^2+2}}}$$

$$(3) \quad y = \sqrt{x \cdot \sin x \sqrt{1-e^x}}$$

$$(4) \quad y = x^{e^x}$$

$$(5) \quad y = (\sin x)^{\ln x}$$

10. 求下列隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ ：

$$(1) \quad y = \cos(x+y)$$

(2) $e^y - e^{-x} + xy = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

(3) $x = y + \operatorname{arctg} y$

(4) $y = e^{x+y} + x^{\sin x}$

(5) $\sqrt{x^2 + y^2} = 5e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$

11. 求下列函数的 n 阶导数 :

(1) $y = \frac{1}{1+2x}$

(2) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

(3) $y = \cos ax \cdot \cos bx$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$ 。

13. 若 $f'(x)$ 存在, 求下列函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

(1) $y = f(x^2)$

(2) $y = \ln[f(x)]$

14. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数：

(1) $y = \operatorname{tg}(x + y)$

(2) $y = 1 + xe^y$

15. 求下列函数的微分：

(1) $y = [\ln(1 - x)]^2$

(2) $y = e^{-x} \cos(3 - x)$

(3) $y = \operatorname{tg}^2(1 + 2x^2)$

16. 计算下列各式的近似值：

(1) $y = \arcsin 0.5002$

(2) $y = \sqrt[3]{996}$

17. 求极限：

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - x]$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)}{e^{-x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{x^{-2}}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$$

18. 确定下列函数的单调区间：

$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$$

$$(2) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$$

$$(3) y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0)$$

$$(4) y = x + |\sin 2x|$$

19. 求下列函数的极值：

$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$$

$$(2) y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$$

$$(3) y = e^x \cos x$$

$$(4) y = 2e^x + e^{-x}$$

$$(5) \quad y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$(6) \quad y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$$

20. 求下列函数图形的拐點及凹凸区间：

$$(1) \quad y = \ln(x^2 + 1)$$

$$(2) \quad y = e^{\arctan x}$$

$$(3) \quad y = x^4(12 \ln x - 7)$$

21. 描绘下列函数的图形：

$$(1) \quad y = \frac{x}{1+x^2}$$

$$(2) \quad y = e^{-(x-1)^2}$$

$$(3) \quad y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$(4) \quad y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

22. 要造一圆柱形油罐，体积为 V ，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时直径与高的比是多少？

23. 一火車的锅炉每小時的耗煤費用與速度的立方成正比。已知當速度為每小時 20 公裏時，每小時花費的煤價為 40 元。至於其他費用每小時需 200 元。問當火車行駛的速度為多少時才能使火車從甲地到乙地的總費用最省？

第三章 不定積分

1. 求下列不定積分：

$$(1) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$(2) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$(3) \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$$

$$(4) \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$$

$$(5) \int \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} d\theta$$

$$(6) \int a^x e^x dx$$

2. 設有一曲線 $y = f(x)$ ，在其上任一點 (x, y) 處的切線斜率為 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ，並知此曲線通過點 $(3, 2)$ ，求曲線的方程。

3. 设有一通過原點的曲线 $y = f(x)$ ，在其上任一點 (x, y) 处切线斜率為 $-2 + 2ax + 3x^2$ ，其中 a 為常數，且知其拐點的橫坐標為 $-\frac{1}{3}$ ，求曲线的方程。

4. 求下列不定积分：

$$(1) \int \frac{1}{(2x+3)^9} dx$$

$$(2) \int \sqrt{1-3x} dx \quad (\omega, \alpha \text{ 為常數})$$

$$(3) \int \sin(\omega t + \alpha) dt$$

$$(4) \int e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$(5) \int \frac{1}{1+2x^2} dx$$

$$(6) \int 10^{2x} dx$$

$$(7) \int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx$$

$$(8) \int \frac{x}{3-2x^2} dx$$

$$(9) \int \frac{x}{(1+3x^2)^2} dx$$

$$(10) \int \frac{x}{\sqrt{2-4x^4}} dx$$

$$(11) \int x^2 e^{-x^3} dx$$

$$(12) \int \frac{\sin x}{2 + \cos^2 x} dx$$

$$(13) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$(14) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$(15) \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2} \arcsin \frac{x}{2}} dx$$

$$(16) \int \frac{1}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx$$

$$(17) \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$(18) \int \sin 3x \sin 5x dx$$

$$(19) \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

$$(20) \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(21) \int \frac{1}{3+2x-x^2} dx$$

$$(22) \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$$

5. 求下列各不定积分：

$$(1) \int x\sqrt{1-2x} dx$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{e^\theta+1}} d\theta$$

$$(4) \int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$(5) \int \sqrt{(1-x^2)^3} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}} dx$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/865120140010012003>