

华中师大一附中 2024-2025 学年度上学期高三期中检测

数学试题

时限：120 分钟 满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

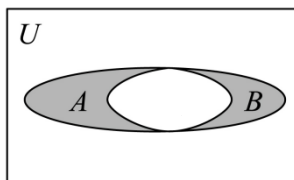
1. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1 - \lambda, \lambda)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 $\lambda =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

2. 若 $P: \log_4(a-1) < \frac{1}{2}$, $Q: a^2 - 2a - 3 < 0$, 则 P 是 Q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 A, B 是全集 U 的两个子集, 则如图所示的阴影部分所表示的集合是 ()



- A. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ B. $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$
C. $(A \cup B) \cap \complement_U (A \cap B)$ D. $(A \cap B) \cup \complement_U (A \cup B)$

4. 若 $a = 1.2^{0.5}$, $b = \log_5 2$, $c = 0.5^{0.2}$, 则 ()

- A. $c > a > b$ B. $a > b > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

5. 已知 α, β 都是锐角, $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 3$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos \alpha \sin \beta =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{12}$

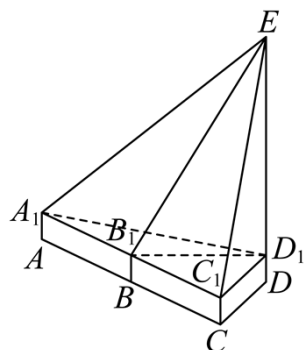
6. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心, $BC = 2$, $\angle BAC = 30^\circ$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

7. 某中学数学兴趣小组为测量学校附近某建筑物的高度, 在学校操场选择了同一条直线上的 A, B, C 三点进行测量. 如图, $AC = 20$ (单位: 米), 点 B 为 AC 中点, 兴趣小组组长小王在 A, B, C 三点正

上方 2 米处的 A_1 , B_1 , C_1 观察建筑物最高点 E 的仰角分别为 α , β , γ , 其中 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\tan \beta = 2$, $\tan \gamma = \sqrt{3}$, 点 D 为点 E 在地面上的正投影, 点 D_1 为 DE 上与 A_1 , B_1 , C_1 位于同一高度的点, 则建筑物的高度 DE 为 () 米.



- A. 20 B. 22 C. 40 D. 42

8. 设函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + \sin(x-1)$, 则关于 x 的不等式 $f(x^2 - x - 2) + f(-2x) \geq 0$ 的解集为 ()

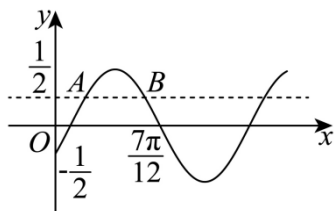
- A. $[-1, 4]$ B. $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$
C. $[-2, 1]$ D. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x) = x^3 - x + 3$, $g(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$, $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 则 ()

- A. $f'(-1) = 2$
B. 当 $f'(x_0) = 2$ 时, $x_0 = -1$
C. 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线方程为 $x + y - 5 = 0$
D. 当 $x > 0$ 时, $|g(-x)| < |g(x)|$

10. 某个简谐运动可以用函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$), $x \in [0, +\infty)$ 来表示, 部分图象如图所示, 则 ()



- A. $|AB| = \frac{2\pi}{3}$
- B. 这个简谐运动的频率为 $\frac{1}{\pi}$, 初相为 $-\frac{\pi}{6}$
- C. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是曲线 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的一条对称轴
- D. 点 $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ 是曲线 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的一个对称中心

11. 已知实数 x, y 满足 $e^{x+y} + \frac{y}{x} = 0$, 则 ()

- A. 当 $y < 0$ 时, $x + y = 0$
- B. 当 $x < 0$ 时, $x + y = 0$
- C. 当 $x + y \neq 0$ 时, $y - x > 2$
- D. 当 $x + y \neq 0$ 时, $-1 < xy < 0$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为单位向量, 且 $\vec{e}_1$ 在 $\vec{e}_2$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\vec{e}_2$, 则 $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 若实数 a, b 满足 $-1 < a + b < 3, 2 < a - b < 4$, 则 $3a + b$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 点 A 是 C 右支上一点, 若

$\triangle AF_1F_2$ 的内切圆的圆心为 M, 半径为 a , 且 $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OF_2}$, 则 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sqrt{3}a \sin C - a \cos C = c - b$.

(1) 求 A;

(2) 若角 A 的平分线交边 BC 于点 D, $AD = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

16. 已知函数 $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x$ ($a > 0$), 且 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立.

(1) 求 a 的值;

(2) 设 $g(x) = b(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x$, 若 $\forall x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\exists x_2 \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$, 使得 $g(x_1) \leq f(x_2)$,

求实数 b 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的最小值为 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值;

(2) 若 $a = 0$, 函数 $g(x) = e^x + \frac{f(x) - 1}{x}$, 求 $g(x)$ 的最小值.

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $A(0, 1)$ 在 C 上, 直线 l 与 C 交于不同于 A

的两点 M, N .

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$, 求 $\triangle AMN$ 面积的最大值;

(3) 记直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2 = -\frac{1}{16}$, 证明: 以 MN 为直径的圆过定点, 并求出定点坐标.

19. 已知函数 $f(x) = \sin x + ax^3 - x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 判断 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性, 并说明理由;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $g(x) = \sin x$, 在 $g(x)$ 的图象上有一点列 $A_i \left(\frac{1}{2^i}, g\left(\frac{1}{2^i}\right)\right) (i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}^*)$, 直线 $A_i A_{i+1}$ 的

斜率为 $k_i (i = 1, 2, \dots, n-1, n \geq 2)$, 求证: $\sum_{i=1}^{n-1} k_i > n - \frac{10}{9}$.

华中师大一附中 2024-2025 学年度上学期高三期中检测

数学试题

时限：120 分钟 满分：150 分 命题人：沈宇为 审题人：胡立松

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1 - \lambda, \lambda)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 $\lambda =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量数量积的坐标表示求解即可.

【详解】因为 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1 - \lambda, \lambda)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$,

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (1 - \lambda) + 2 \times \lambda = 0$, 解得 $\lambda = -1$,

故选：A

2. 若 $p: \log_4(a-1) < \frac{1}{2}$, $q: a^2 - 2a - 3 < 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】解两个不等式，分别得到 $1 < a < 3$ 和 $-1 < a < 3$ ，根据真包含关系，得到 p 是 q 的充分不必要条件.

【详解】 $\log_4(a-1) < \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4(a-1) < \log_4 2$, 故 $0 < a-1 < 2$, 解得 $1 < a < 3$,

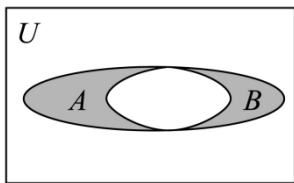
$a^2 - 2a - 3 < 0$, 解得 $-1 < a < 3$,

因为 $\{a | 1 < a < 3\}$ 是 $\{a | -1 < a < 3\}$ 的真子集,

所以 p 是 q 的充分不必要条件.

故选：A

3. 已知 A, B 是全集 U 的两个子集，则如图所示的阴影部分所表示的集合是 ()



A. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

B. $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$

C. $(A \cup B) \cap \complement_U (A \cap B)$

D. $(A \cap B) \cup \complement_U (A \cup B)$

【答案】C

【解析】

【分析】由给定的韦恩图分析出阴影部分所表示的集合中元素满足的条件，再根据集合运算的定义即可得解

【详解】由图可知，阴影部分所表示的集合中的元素 $x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \cap B$ ，
则阴影部分所表示的集合是 $(A \cup B) \cap \complement_U (A \cap B)$.

故选：C.

4. 若 $a = 1.2^{0.5}$ ， $b = \log_5 2$ ， $c = 0.5^{0.2}$ ，则（ ）

A. $c > a > b$

B. $a > b > c$

C. $a > c > b$

D. $c > b > a$

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数函数、对数函数的性质判断即可.

【详解】因为 $a = 1.2^{0.5} > 1.2^0 = 1$ ， $0 = \log_5 1 < \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ ，即 $0 < b < \frac{1}{2}$ ，
 $0.5 = 0.5^1 < 0.5^{0.2} < 0.5^0 = 1$ ，即 $\frac{1}{2} < c < 1$ ，

所以 $a > c > b$.

故选：C

5. 已知 α ， β 都是锐角， $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 3$ ， $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ ，则 $\cos \alpha \sin \beta =$ （ ）

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{12}$

【答案】D

【解析】

【分析】运用两角和与差的正弦公式展开，化切为弦得 $\sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta$ ，代入即可求解.

【详解】由题意 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$ ，又 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = 3$ ，

所以 $\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = 3$ ，即 $\sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta$ ，

所以 $4 \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$ ，所以 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{12}$ 。

故选：D

6. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心， $BC = 2$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的最大值为（ ）

A. 4

B. 6

C. $2\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】得到 $\angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ$ ， $\triangle OBC$ 为等边三角形， $OA = OB = OC = 2$ ，变形得到 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 - 4 \cos \angle AOC$ ，当 A, O, C 三点共线，即

$\cos \angle AOC = -1$ 时， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 - 4 \cos \angle AOC$ 取得最大值，最大值为 6。

【详解】因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心， $\angle BAC = 30^\circ$ ，

所以 $\angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ$ ，

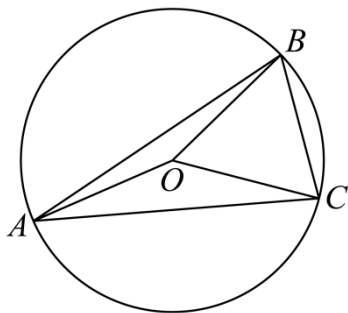
因为 $OB = OC$ ，所以 $\triangle OBC$ 为等边三角形，

故 $OA = OB = OC = 2$ ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC \\ &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - 4 \cos \angle AOC = 2 - 4 \cos \angle AOC,\end{aligned}$$

当 A, O, C 三点共线，即 $\cos \angle AOC = -1$ 时， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 - 4 \cos \angle AOC$ 取得最大值，

最大值为 $2 + 4 = 6$ 。

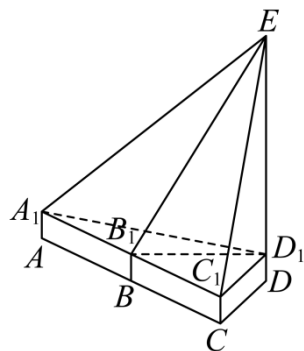


故选：B

7. 某中学数学兴趣小组为测量学校附近某建筑物的高度，在学校操场选择了同一条直线上的 A ， B ， C

三点进行测量. 如图, $AC = 20$ (单位: 米), 点 B 为 AC 中点, 兴趣小组组长小王在 A, B, C 三点正上方 2 米处的 A_1, B_1, C_1 观察建筑物最高点 E 的仰角分别为 α, β, γ , 其中 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\tan \beta = 2, \tan \gamma = \sqrt{3}$, 点 D 为点 E 在地面上的正投影, 点 D_1 为 DE 上与 A_1, B_1, C_1 位于同一高度的点, 则建筑物的高度 DE 为 () 米.



A. 20

B. 22

C. 40

D. 42

【答案】B

【解析】

【分析】设 $D_1E = h$, 得到 $A_1D_1 = \frac{\sqrt{6}h}{3}$, $B_1D_1 = \frac{h}{2}$, $C_1D_1 = \frac{\sqrt{3}h}{3}$, 并得到 $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$, 根据

$\angle A_1B_1D_1 + \angle C_1B_1D_1 = \pi$ 得到 $\cos \angle A_1B_1D_1 + \cos \angle C_1B_1D_1 = 0$, 结合余弦定理得到方程, 求出 $h = 20$, 得到筑物的高度 DE .

【详解】设 $D_1E = h$, 因为 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\tan \beta = 2$, $\tan \gamma = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } A_1D_1 = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{6}h}{3}, \quad B_1D_1 = \frac{h}{\tan \beta} = \frac{h}{2}, \quad C_1D_1 = \frac{h}{\tan \gamma} = \frac{\sqrt{3}h}{3},$$

因为 $AC = 20$, 点 B 为 AC 中点,

所以 $A_1C_1 = 20$, 点 B_1 为 A_1C_1 中点,

故 $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$,

$$\text{在 } \triangle A_1B_1D_1 \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos \angle A_1B_1D_1 = \frac{100 + \frac{h^2}{4} - \frac{2h^2}{3}}{2 \times 10 \times \frac{h}{2}} = \frac{100 - \frac{5h^2}{12}}{10h},$$

在 $\triangle C_1B_1D_1$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle C_1B_1D_1 = \frac{100 + \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{3}}{2 \times 10 \times \frac{h}{2}} = \frac{100 - \frac{h^2}{12}}{10h}$,

由于 $\angle A_1B_1D_1 + \angle C_1B_1D_1 = \pi$, 故 $\cos \angle A_1B_1D_1 + \cos \angle C_1B_1D_1 = 0$,

即 $\frac{100 - \frac{5h^2}{12}}{10h} + \frac{100 - \frac{h^2}{12}}{10h} = 0$, 解得 $h = 20$,

故建筑物的高度 $DE = h + 2 = 22$ (米).

故选: B

8. 设函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + \sin(x-1)$, 则关于 x 的不等式 $f(x^2 - x - 2) + f(-2x) \geq 0$ 的解集为 ()

A. $[-1, 4]$

B. $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

C. $[-2, 1]$

D. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】令 $g(x) = f(x+1) = e^x - e^{-x} + \sin x$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 得到 $g(x)$ 为奇函数, 即

$f(-x+1) = -f(x+1)$, 求导, 得到 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 变形得到 $g(x^2 - x - 3) \geq g(2x+1)$, 从而

$x^2 - x - 3 \geq 2x+1$, 求出解集.

【详解】令 $g(x) = f(x+1) = e^x - e^{-x} + \sin x$, 定义域为 $\mathbb{R}$,

$$g(-x) = e^{-x} - e^x + \sin(-x) = e^{-x} - e^x - \sin x = -g(x),$$

故 $g(x)$ 为奇函数, 即 $f(-x+1) = -f(x+1)$,

$$g'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + \cos x = 2 + \cos x > 0,$$

故 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

$$f(x^2 - x - 2) + f(-2x) \geq 0 \Rightarrow f(x^2 - x - 2) \geq -f(-2x),$$

$$\text{故 } f[(x^2 - x - 3) + 1] \geq -f[(-2x - 1) + 1] = f[(2x + 1) + 1],$$

$$\text{即 } g(x^2 - x - 3) \geq g(2x + 1),$$

所以 $x^2 - x - 3 \geq 2x + 1$, $x^2 - 3x - 4 \geq 0$,

解得 $x \geq 4$ 或 $x \leq -1$.

故选: B

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x) = x^3 - x + 3$, $g(x) = \frac{f(x)}{x} + 1$, $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 则 ()

A. $f'(-1) = 2$

B. 当 $f'(x_0) = 2$ 时, $x_0 = -1$

C. 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线方程为 $x + y - 5 = 0$

D. 当 $x > 0$ 时, $|g(-x)| < |g(x)|$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求出 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 即可判断 A、B, 表示出 $y = g(x)$, 利用导数的几何意义求出切线方程, 即可判断 C, 利用作差法判断 D.

【详解】对于 A: 因为 $f(x) = x^3 - x + 3$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 则 $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 2$, 故 A 正确;

对于 B: 因为 $f'(x_0) = 2$, 即 $3x_0^2 - 1 = 2$, 解得 $x_0 = \pm 1$, 故 B 错误;

因为 $g(x) = \frac{f(x)}{x} + 1 = \frac{x^3 - x + 3}{x} + 1 = x^2 + \frac{3}{x}$,

则 $g'(x) = 2x - \frac{3}{x^2}$, 所以 $g'(1) = -1$,

则 $y = g(x)$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线方程为 $y - 4 = -(x - 1)$, 即 $x + y - 5 = 0$, 故 C 正确;

当 $x > 0$ 时 $g(x) = x^2 + \frac{3}{x} > 0$, $g(-x) = x^2 - \frac{3}{x}$,

令 $h(x) = x^2 - \frac{3}{x} (x > 0)$, 因为 $y = x^2$ 与 $y = -\frac{3}{x}$ 均在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = -2 < 0$, $h(2) = \frac{7}{2} > 0$,

所以存在 $x_0 \in (1, 2)$ 使得 $h(x_0) = 0$, 所以当 $0 < x < x_0$ 时 $h(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时 $h(x) > 0$,

$$\text{所以 } |g(-x)| = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{x}, & x \geq x_0 \\ -\left(x^2 - \frac{3}{x}\right), & 0 < x < x_0 \end{cases},$$

$$\text{所以当 } x \geq x_0 \text{ 时 } |g(-x)| - |g(x)| = \left(x^2 - \frac{3}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) = -\frac{6}{x} < 0,$$

$$\text{所以 } |g(-x)| < |g(x)|,$$

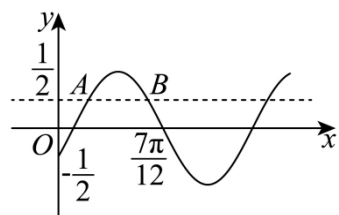
$$\text{当 } 0 < x < x_0 \text{ 时 } |g(-x)| - |g(x)| = -\left(x^2 - \frac{3}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) = -2x^2 < 0,$$

$$\text{所以 } |g(-x)| < |g(x)|,$$

综上可得当 $x > 0$ 时, $|g(-x)| < |g(x)|$, 故 D 正确.

故选: ACD

10. 某个简谐运动可以用函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$), $x \in [0, +\infty)$ 来表示, 部分图象如图示, 则 ()



A. $|AB| = \frac{2\pi}{3}$

B. 这个简谐运动的频率为 $\frac{1}{\pi}$, 初相为 $-\frac{\pi}{6}$

C. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是曲线 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的一条对称轴

D. 点 $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ 是曲线 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的一个对称中心

【答案】BD

【解析】

【分析】根据图象可得 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 选项 A, 利用 $y = \sin x$ 的图象与性质可得 $|AB| = \frac{\pi}{3}$, 即可

判断选项 A 的正误; 选项 B, 由频率和初相的定义, 结合 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 即可求解; 选项 C 和

D, $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 4x$, 利用 $y = \cos x$ 性质, 求出 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 4x$ 的对称轴和对称中心,

即可判断出选项 C 和 D 的正误.

【详解】由图知 $f(0) = \sin \varphi = -\frac{1}{2}$, 由图象知 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $|\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$,

又由五点作图知, 第三个点为 $(\frac{7\pi}{12}, 0)$, 所以 $\frac{7\pi}{12}\omega - \frac{\pi}{6} = \pi$, 得到 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

对于选项 A, 设 $A(x_1, \frac{1}{2}), B(x_2, \frac{1}{2})$, 由 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 得到 $2x_1 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$2x_2 - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

所以 $|AB| = |x_2 - x_1| = \frac{\pi}{3}$, 故选项 A 错误,

对于选项 B, 因为 $\omega = 2$, 所以频率为 $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$, 由 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 知初相为 $-\frac{\pi}{6}$, 所以选项 B

正确,

对于选项 C, 因为 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 4x$, 由 $4x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $x = \frac{\pi}{8}$ 不是曲线 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的对称轴, 故选项 C 错误,

对于选项 D, 因为 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 4x$, 由 $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 得到 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

令 $k = 0$, 得到 $x = \frac{\pi}{8}$, 所以点 $(\frac{\pi}{8}, 0)$ 是曲线 $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的一个对称中心, 故选项 D 正确.

故选: BD.

11. 已知实数 x, y 满足 $e^{x+y} + \frac{y}{x} = 0$, 则 ()

A. 当 $y < 0$ 时, $x + y = 0$

B. 当 $x < 0$ 时, $x + y = 0$

C. 当 $x + y \neq 0$ 时, $y - x > 2$

D. 当 $x + y \neq 0$ 时, $-1 < xy < 0$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A 选项, $y < 0$, 所以 $x > 0$, 变形为 $x + \ln x = -y + \ln(-y)$, 令 $f(x) = x + \ln x, x > 0$, 故

$f(x) = f(-y)$, 根据函数单调性得到 $x + y = 0$; B 选项, $x < 0$ 时, $y > 0$, 变形得到

$y - \ln y = -x - \ln(-x)$, 构造 $g(x) = x - \ln x$, $x > 0$, 则 $g(y) = g(-x)$, 求导得到 $g(x)$ 的单调性,

$g(x) = x - \ln x$ 不单调, 故 y 不一定等于 $-x$, 即 $x + y = 0$ 不一定成立; CD 选项, 由 AB 选项知,

$x + y \neq 0$ 时, $x < 0$, $y > 0$, 令 $y = n, -x = m$, 则有 $g(m) = g(n)$, 不妨设 $0 < m < 1 < n$, 故

$\frac{n-m}{\ln n - \ln m} = 1$, 先证明出 $\sqrt{mn} < \frac{n-m}{\ln n - \ln m} < \frac{m+n}{2}$, 从而得到 $m+n > 2$, $0 < mn < 1$, 故 $y-x > 2$,

$-1 < xy < 0$, CD 正确.

【详解】A 选项, 由 $e^{x+y} + \frac{y}{x} = 0$ 得 $e^{x+y} = -\frac{y}{x} > 0$, 因为 $y < 0$, 所以 $x > 0$,

$e^{x+y} = -\frac{y}{x} > 0$ 两边取对数得, $x + y = \ln\left(-\frac{y}{x}\right) = \ln(-y) - \ln x$,

故 $x + \ln x = -y + \ln(-y)$,

令 $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$, 故 $f(x) = f(-y)$,

由于 $f(x) = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $x = -y$, 故 $x + y = 0$, A 正确;

B 选项, $x < 0$ 时, $y > 0$, 故 $x + y = \ln\left(-\frac{y}{x}\right) = \ln y - \ln(-x)$,

故 $y - \ln y = -x - \ln(-x)$,

令 $g(x) = x - \ln x$, $x > 0$, 则 $g(y) = g(-x)$,

其中 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x) = x - \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $g(x) = x - \ln x$ 不单调, 故 y 不一定等于 $-x$, 即 $x + y = 0$ 不一定成立, B 错误;

CD 选项, 由 AB 选项知, $x + y \neq 0$ 时, $x < 0$, $y > 0$,

令 $y = n, -x = m$, 则有 $g(m) = g(n)$, 不妨设 $0 < m < 1 < n$,

故 $\frac{n-m}{\ln n - \ln m} = 1$,

下面证明 $\sqrt{mn} < \frac{n-m}{\ln n - \ln m} < \frac{m+n}{2}$,

先证不等式右边, $\frac{n-m}{m+n} < \frac{\ln n - \ln m}{2} \Rightarrow \frac{\frac{n}{m}-1}{\frac{n}{m}+1} < \frac{1}{2} \ln \frac{n}{m}$,

令 $\frac{n}{m} = t > 1$, 即证 $\frac{t-1}{t+1} < \frac{1}{2} \ln t$,

令 $q(t) = \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2} \ln t$, $t > 1$,

则 $q'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{1}{2t} = \frac{4t - (t+1)^2}{2t(t+1)^2} = \frac{-(t-1)^2}{2t(t+1)^2} < 0$,

故 $q(t) = \frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{2} \ln t$ 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $q(1) = 0$, 故 $\frac{t-1}{t+1} < \frac{1}{2} \ln t$, 所以 $\frac{n-m}{\ln n - \ln m} < \frac{m+n}{2}$,

即 $1 < \frac{m+n}{2}$, $m+n > 2$, 故 $y-x > 2$, C 正确;

再证不等式左边, $\sqrt{mn} < \frac{n-m}{\ln n - \ln m}$, 即证 $\ln n - \ln m < \frac{n-m}{\sqrt{mn}} \Rightarrow \ln \frac{n}{m} < \sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{m}{n}}$,

令 $\sqrt{\frac{n}{m}} = u > 1$, 即证 $2 \ln u < u - \frac{1}{u}$,

令 $w(u) = 2 \ln u - u + \frac{1}{u}$, $u > 1$, 则 $w'(u) = \frac{2}{u} - 1 - \frac{1}{u^2} = \frac{-u^2 + 2u - 1}{u^2} = \frac{-(u-1)^2}{u^2} < 0$,

故 $w(u) = 2 \ln u - u + \frac{1}{u}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $w(1) = 0$, 故 $2 \ln u < u - \frac{1}{u}$, 故 $\sqrt{mn} < \frac{n-m}{\ln n - \ln m}$,

即 $\sqrt{mn} < 1$, 所以 $0 < mn < 1$, 故 $0 < -xy < 1$, 所以 $-1 < xy < 0$, D 正确.

故选: ACD

【点睛】方法点睛: 对数平均不等式为 $\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 在处理函数极值点偏移问题上经常

用到, 可先证明, 再利用对数平均不等式解决相关问题, 证明的方法是结合 $\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}$, 换元后将

二元问题一元化, 利用导函数进行证明

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/865303134103012010>