2023-2024学年广东省广州市高三上学期数学质量检测

模拟试题

本试卷共22小题，满分150分，考试用时120分钟.

注意事项：

1.答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内.

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上.

3.非选择题是必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和徐改液，不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.

一、单选题（本大题8小题，每小题5分，共40分）

1．已知集合$A=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+2}<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|3^x>1\right.\right\}$，则$A\cup B=$（　）

A．$\{x|x>-2\}$　B．$\{x|x<-2$或$x>0\}$　C．$\{x|x<-2$或$x>1\}$　D．$\{x|0<x<1\}$

2．i是虚数单位，复数z满足$\overline{z}(2-4\mathrm{i})=-10\mathrm{i}$，则$z=$（　）

A．$-1-2\mathrm{i}$　B．$1+2\mathrm{i}$

C．$2-\mathrm{i}$　D．$2+\mathrm{i}$

3．已知两单位向量$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则向量$\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$与$2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$的夹角$\theta=$（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{2\pi}{3}$　D．$\frac{3\pi}{4}$

4．在锐角$\triangle ABC$中，若$B=2A$，则$\frac{\sin B}{\sin A}$的取值范围是（　）

A．$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$　B．$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　C．$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　D．$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

5．数列$\{F_n\}:1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots,$成为斐波那契数列，是由十三世纪意大利数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”，该数列从第三项开始，每项等于其前两相邻两项之和，记该数$\{F_n\}$的前n项和为S_n，则下列结论正确的是（　）

A. $S_{2019}=F_{2021}+2$　　B. $S_{2019}=F_{2021}-1$

C. $S_{2019}=F_{2020}+2$　　D. $S_{2019}=F_{2020}-1$

6．生物学家认为，睡眠中的恒温动物的脉搏率f（单位：心跳次数$\cdot \min^{-1}$）与体重W（单位：kg）的$\frac{1}{3}$次方成反比.若A、B为两个睡眠中的恒温动物，A的体重为$2\mathrm{kg}$、脉搏率为210次$\cdot \min^{-1}$，B的脉搏率是70次$\cdot \min^{-1}$，则B的体重为（　）

A. $6\mathrm{kg}$　　B. $8\mathrm{kg}$　　C. $18\mathrm{kg}$　　D. $54\mathrm{kg}$

7．已知正三棱锥$S-ABC$的底面边长为$\sqrt{2}$，外接球表面积为3π，$SA<\sqrt{2}$，点M，N分别是线段AB，AC的中点，点P，Q分别是线段SN和平面SCM上的动点，则$AP+PQ$的最小值为（　）

A. $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8．点$A\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>1,y_0<0\right),B,C$均在抛物线$y^2=4x$上，若直线$AB,AC$分别经过两定点$(-1,0),M(1,4)$，则$BC$经过定点$N$，直线$BC,MN$分别交$x$轴于$D,E$，$O$为原点，记$|OD|=a,|DE|=b$，则$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+3}$的最小值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{5}$

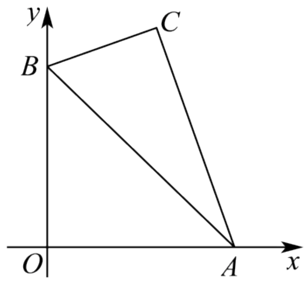
二、多选题（本大题共4小题，每小题5分，共20分.每题在给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

9．将函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标保持不变，得到函数$g\left(x\right)$的图象，则关于$g\left(x\right)$的说法正确的是（　）

A．最小正周期为2π　　B．偶函数

C．在$\left(\frac{9}{4}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$上单调递减　　D．关于$\left(\frac{2k-1}{8}\pi,0\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$中心对称

10．如图，在平面直角坐标系中，直角三角形ABC中，$B=\frac{\pi}{3}$，它的两个锐角的顶点A和B分别在x正半轴、y正半轴上滑动，则下列结论正确的是（　　）



A．点 C 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上　　B．点 C 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上

C．点 C 的轨迹长度等于 AC　　D．点 C 的轨迹长度等于 BC

11．投掷一枚质地不均匀的硬币，已知出现正面向上的概率为 p，记 A_n 表示事件“在 n 次投掷中，硬币正面向上出现偶数次”，则下列结论正确的是（　）

A．A_2 与 $\overline{A_2}$ 是互斥事件　　B．$P\left(A_2\right)=p^2$

C．$P\left(A_{n+1}\right)=(1-2p)P\left(A_n\right)+p$　　D．$P\left(A_{2n}\right)>P\left(A_{2n+2}\right)$

12．设函数 $f\left(x\right)=x\ln x+\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)$，则（　）

A．$f\left(x\right)=f\left(1-x\right)$

B．函数 $f\left(x\right)$ 有最大值 $-\ln 2$

C．若 $x_1+x_2=1$，则 $x_1f\left(x_2\right)+x_2f\left(x_1\right)\geq-\ln 2$

D．若 $x_1+x_2<1$，且 $\frac{1}{2}<x_2<1$，则 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$

三、填空题（本大题 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．在 $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{3}{x}\right)^n$ 的二项式中，所有的二项式系数之和为 256，则常数项等于________.

14．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{3}{2}$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $2a_{n+1}=a_{n+1}S_n+S_n{}^2$，则 $S_n=$__________.

15．已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 点是直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上一动点，当 P 点的纵坐标为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ 时，$\angle F_1PF_2$ 最大，则椭圆 C 的离心率为________.

16．函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)=f(-x)-2\sin x$，且当

$x\geq 0$时，$f'(x)>-\cos x$，则不等式$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>f(x)+\sin x-\cos x$的解集为__________.

四、解答题（本大题6小题，共70分）

17．（本题10分）在ΔABC中，角A，B，C对的边分别为a，b，c，$c=2$，$\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\cos C$.

（I）求$\frac{a}{\sin A}$的值；

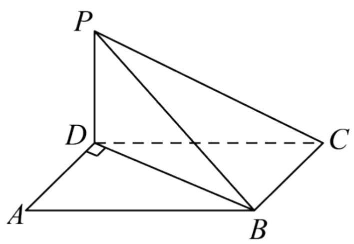
（II）若$a+b=ab$，求ΔABC的面积$S_{\Delta ABC}$.

18．（本题12分）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=1$，$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_n^2+a_n$，T_n是数列$\{b_n\}$的前n项和，且a_n，$\sqrt{T_n}$，a_{n+1}成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\frac{(-1)^n(b_n+1)+1}{2S_n}\right\}$前$n$项的和$U_n$.

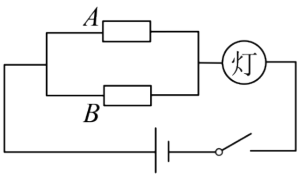
19．（本题12分）如图，平行四边形$ABCD$中，$AB=4, AD=2$，将$\triangle ABD$沿BD翻折，得到四面体$PBCD$.



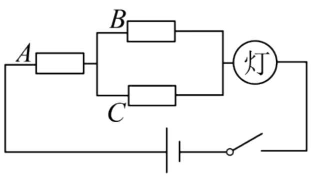
(1)若$BD=PC=4$，作出二面角$P-BC-D$的平面角，说明作图理由并求其大小；

(2)若 $PC=2\sqrt{5},\angle A=60°$，求点 D 到平面 PBC 的距离.

20．（本题 12 分）某电商专门生产某种电子元件，生产的电子元件除编号外，其余外观完全相同，为了检测元件是否合格，质检员设计了图甲、乙两种电路.



甲

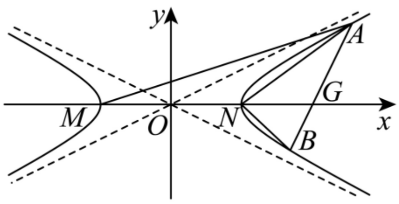


乙

(1)在设备调试初期，已知该电商试生产了一批电子元件共 5 个，只有 2 个合格，质检员从这批元件中随机抽取 2 个安装在甲图电路中的 A，B 处，请用集合的形式写出试验的样本空间，并求小灯泡发亮的概率；

(2)通过设备调试和技术升级后，已知该电商生产的电子元件合格率为 0.9，且在生产过程中每个电子元件是否合格互不影响，质检员从该电商生产的一批电子元件中随机抽取 3 个安装在乙图电路中的 A，B，C 处，求小灯泡发亮的概率.

21．（本题 12 分）已知双曲线 C 的虚轴长为 2，其中一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.且 M，N 分别是双曲线的左、右顶点.



(1)求双曲线 C 的方程；

(2)设过点 $G(4,0)$ 的动直线 l 交双曲线 C 右支于 A，B 两点，若直线 AM，BN 的斜率分别为 k_1，k_2.

①试探究k_1与k_2的比值$\dfrac{k_1}{k_2}$是否为定值.若是定值，求出这个定值；若不是定值，请说明理由；

②设$\angle ANG=\alpha$，$\angle BNG=\beta$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，若$\tan\theta=\dfrac{1}{7}$，$\alpha=\beta-\theta$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$），求$\triangle BGN$的面积.

22．（本题 12 分）已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-m}-\dfrac{\ln x}{x}$（$m\in\mathrm{R}$）.

(1)当$m=1$时，求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

(2)若函数$f\left(x\right)$的图象与x轴相切，求证：$1+\ln 2<m<2+\ln 6$.

答案详解

本试卷共 22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内.

2.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上.

3.非选择题是必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.

一、单选题（本大题 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+2}<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|3^x>1\right.\right\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$\left\{x\left|x>-2\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|x<-2\right.\right.$ 或 $\left.x>0\right\}$　C．$\left\{x\left|x<-2\right.\right.$ 或 $\left.x>1\right\}$　D．$\left\{x\left|0<x<1\right.\right\}$

【答案】A

【分析】解不等式求出 $A=\left\{x\left|-2<x<1\right.\right\}$，再利用并集的概念进行运算即可.

【详解】$A=\left\{x\left|-2<x<1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x>0\right.\right\}$，则 $A\cup B=\left\{x\left|x>-2\right.\right\}$.

故选：A.

【点睛】本题考查集合并集的运算，是基础题.

2．i 是虚数单位，复数 z 满足 $\bar{z}\left(2-4\mathrm{i}\right)=-10\mathrm{i}$，则 $z=$（　）

A．$-1-2\mathrm{i}$　　　　B．$1+2\mathrm{i}$

C．$2-\mathrm{i}$　　D．$2+\mathrm{i}$

【答案】D

【分析】方法一：由题设可得$\overline{z}=\dfrac{-10\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}$，根据复数的除法运算化简，进而根据共轭复数的定义求解即可；

方法二：设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathrm{R}\right)$，根据复数的乘法运算及复数相等列出方程组求解即可.

【详解】方法一：由$\overline{z}\left(2-4\mathrm{i}\right)=-10\mathrm{i}$，

则$\overline{z}=\dfrac{-10\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}=\dfrac{-10\mathrm{i}\cdot\left(2+4\mathrm{i}\right)}{\left(2-4\mathrm{i}\right)\left(2+4\mathrm{i}\right)}=\dfrac{-20\mathrm{i}-40\mathrm{i}^2}{4-16\mathrm{i}^2}=\dfrac{-20\mathrm{i}+40}{20}=2-\mathrm{i}$，

所以$z=2+\mathrm{i}$.

故选：D.

方法二：设$z=a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathrm{R}\right)$，则$\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

所以$\left(a-b\mathrm{i}\right)\cdot\left(2-4\mathrm{i}\right)=-10\mathrm{i}$，即$2a-4b-\left(4a+2b\right)\mathrm{i}=-10\mathrm{i}$，

所以$\begin{cases}2a-4b=0\\-\left(4a+2b\right)=-10\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，所以$z=2+\mathrm{i}$.

故选：D.

3．已知两单位向量$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则向量$\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$与$2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$的夹角$\theta=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{3\pi}{4}$

【答案】C

【分析】根据平面向量数量积的定义，求模长与夹角即可.

【详解】单位向量$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore\left|\overrightarrow{e_1}\right|=\left|\overrightarrow{e_2}\right|=1,\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\left(\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}\right)=2\overrightarrow{e_1}^2+\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}-6\overrightarrow{e_2}^2=2+\dfrac{1}{2}-6=-\dfrac{7}{2}$

$\left|\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}\right|=\sqrt{1+4\times\dfrac{1}{2}+4}=\sqrt{7}$

$\left|2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}\right|=\sqrt{4-12\times\dfrac{1}{2}+9}=\sqrt{7}$

$\therefore\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$与$2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$的夹角$\theta$的余弦值为

$\cos\theta=\dfrac{\left(\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}\right)}{\left|\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}\right|\times\left|2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}\right|}$

$=\dfrac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$

$=-\dfrac{1}{2}$

又 $\theta\in[0,\pi]$

$\therefore\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

故选：C

【点睛】本题考查求向量夹角问题，属于基础题.

4．在锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $B=2A$，则 $\dfrac{\sin B}{\sin A}$ 的取值范围是（　）

A．$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$　　B．$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　C．$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】A

【分析】根据题意，求得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$，结合倍角公式，得到则 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin 2A}{\sin A}=2\cos A$，即可求解.

【详解】在锐角 $\triangle ABC$ 中，由 $B=2A$，可得 $C=\pi-3A$，于是 $\begin{cases}0<2A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\pi-3A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

解得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin 2A}{\sin A}=2\cos A\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

故选：A.

5．数列 $\{F_n\}:1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$ 成为斐波那契数列，是由十三世纪意大利数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”，该数列从第三项开始，每项等于其前两相邻两项之和，记该数 $\{F_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列结论正确的是（　）

A．$S_{2019}=F_{2021}+2$　　B．$S_{2019}=F_{2021}-1$

C．$S_{2019}=F_{2020}+2$　　D．$S_{2019}=F_{2020}-1$

【答案】B

【解析】利用迭代法可得$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}=F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}+\cdots+F_2+F_1+1$，可得

$F_{n+2}=S_n+1$，代入$n=2019$即可求解.

【详解】由题意可得该数列从第三项开始，每项等于其前两相邻两项之和，

则$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}=F_n+F_{n-1}+F_n=F_n+F_{n-1}+F_{n-1}+F_{n-2}$

$=F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-1}=F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}+F_{n-2}=\cdots$

$=F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}+\cdots+F_2+F_1+1$，

所以$F_{n+2}=S_n+1$，令$n=2019$，可得$S_{2019}=F_{2021}-1$，

故选：B

【点睛】关键点点睛：本题的关键点是理解数列新定义的含义得出$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$，利用迭代法得出

$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}=F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3}+\cdots+F_2+F_1+1$，进而得出$F_{n+2}=S_n+1$.

6．生物学家认为，睡眠中的恒温动物的脉搏率f（单位：心跳次数$\cdot\mathrm{min}^{-1}$）与体重W（单位：kg）的$\frac{1}{3}$次方成反比.若A、B为两个睡眠中的恒温动物，A的体重为$2\mathrm{kg}$、脉搏率为210次$\cdot\mathrm{min}^{-1}$，B的脉搏率是70次$\cdot\mathrm{min}^{-1}$，则B的体重为（　）

A．$6\mathrm{kg}$　　B．$8\mathrm{kg}$　　C．$18\mathrm{kg}$　　D．$54\mathrm{kg}$

【答案】D

【分析】根据题意设$f=\frac{k}{W^{\frac{1}{3}}}(k\neq0)$，代入求解$k$，然后计算出$B$的体重，确定选项.

【详解】根据题意设$f=\frac{k}{W^{\frac{1}{3}}}(k\neq0)$，

当$W=2$，$f=210$,则$k=210\times2^{\frac{1}{3}}$，

当$f=210$，则$W^{\frac{1}{3}}=\frac{210\times2^{\frac{1}{3}}}{70}=3\times2^{\frac{1}{3}}$，所以$W=54$

故选：D

7．已知正三棱锥$S-ABC$的底面边长为$\sqrt{2}$，外接球表面积为3π，$SA<\sqrt{2}$，点M，N分别

是线段 AB，AC 的中点，点 P，Q 分别是线段 SN 和平面 SCM 上的动点，则 $AP+PQ$ 的最小值为（　）

A．$\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【分析】根据外接球表面积求得外接球半径，进而求得三棱锥的高，并推出侧面为等腰直角三角形，作辅助线，将 $AP+PQ$ 转化为一条线段，从而确定 $AP+PQ$ 最小时的线段的位置，再结合三角函数值，解直角三角形 $\triangle AQ'S$,求得答案.

【详解】依题意，$4\pi R^2=3\pi$，解得 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $\triangle ABC$ 是正三角形可知：其外接圆半径为 $\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设点 S 到平面 ABC 的距离为 h，故 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-h\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，

解得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

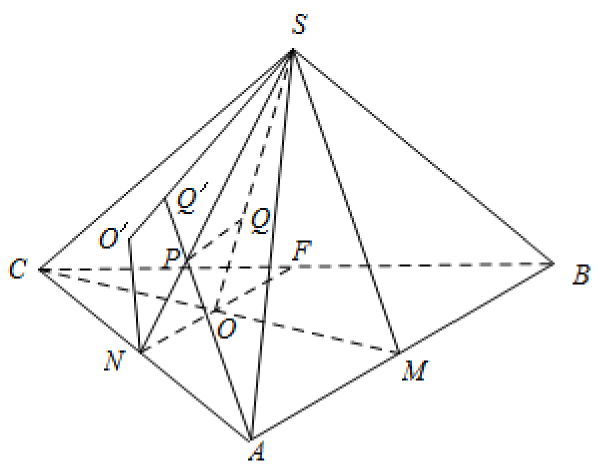
则 $SA=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=1$ 或 $SA=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{2}$（舍去），

故 $SA=1$，则 $SC=1$,而 $AC=\sqrt{2}$，故 $\triangle ASC$ 为等腰直角三角形，$\angle ASC=\dfrac{\pi}{2}$，

故 $\triangle ASB$ 为等腰直角三角形，$\angle ASB=\dfrac{\pi}{2}$,则 $AB\perp SM$，

又 $AB\perp CM.CM\cap SM=M$,故 $AB\perp$ 平面 SCM，

取 CB 中点 F，连接 NF 交 CM 于点 O，则 $NF\parallel AB$,则 $NF\perp$ 平面 SCM，



故 $NO\perp$平面 SCM，则 $\angle SON=90°$，

要求 $AP+PQ$ 最小，首先需 PQ 最小，此时可得 $PQ\perp$平面 SCM，则 $PQ /\!/ FN$；

再把平面 SON 绕 SN 旋转，与平面 SNA 共面，即图中 $SO'N$ 位置，

当 A,P,Q' 共线且 $AQ'\perp SO'$ 时，$AP+PQ$ 的最小值即为 AQ' 的长，

由 $\triangle ASC$ 为等腰直角三角形，

故 $SN=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$NO=\frac{1}{2}NF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}AB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore \sin\angle OSN=\frac{ON}{SN}=\frac{1}{2}$，即 $\angle OSN=30°$，$\therefore \angle ASQ'=45°+30°=75°$，

可得 $\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\left(AP+PQ\right)_{\min}=AQ'=SA\cdot\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

故选：B.

【点睛】本题考查了空间几何体上线段和最小值的求解，涉及到几何体的外接球以及空间的线面位置关系等问题，解答时要发挥空间想象，明确点线面的位置关系，并能进行相关计算，解答的关键是要将两线段的和转化为一条线段，才可求得线段和的最小值.

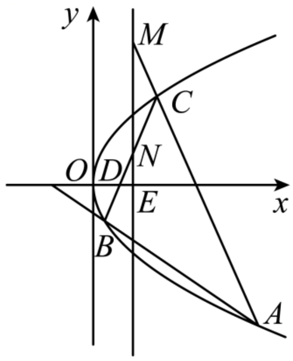
8．点 $A\left(x_0,y_0\right)\left(x_0>1,y_0<0\right),B,C$ 均在抛物线 $y^2=4x$ 上，若直线 AB,AC 分别经过两定点 $\left(-1,0\right),M\left(1,4\right)$，则 BC 经过定点 N，直线 BC,MN 分别交 x 轴于 D,E，O 为原点，记 $\left|OD\right|=a,\left|DE\right|=b$，则 $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+3}$ 的最小值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{5}$

【答案】D

【分析】利用条件，用 y_0 表示出 B,C 两点坐标，从而求出直线 BC 的方程，进而求出定定点 N，再根据条件得到 $a+b=1$，再利用柯西不等式即可求出结果.

【详解】如图，由题易知直线 AB,AC 斜率均存在，



设直线AB方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，$B(x_1,y_1)$，

由$\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0+1}(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}$，消$x$得$(x_0+1)y=y_0(\dfrac{y^2}{4}+1)$，即$\dfrac{y_0}{4}y^2-(x_0+1)y+y_0=0$，

由韦达定理得$y_1y_0=\dfrac{y_0}{\dfrac{y_0}{4}}=4$，所以$y_1=\dfrac{4}{y_0}$，代入$y^2=4x$，得到$x_1=\dfrac{4}{y_0^2}$，所以$B(\dfrac{4}{y_0^2},\dfrac{4}{y_0})$，

设直线方程为$y-4=\dfrac{y_0-4}{x_0-1}(x-1)$，$C(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} y-4=\dfrac{y_0-4}{x_0-1}(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$，消$x$得$(x_0-1)(y-4)=(y_0-4)(\dfrac{y^2}{4}-1)$，

即$\dfrac{(y_0-4)}{4}y^2-(x_0-1)y+4x_0-y_0=0$，由韦达定理得$y_0+y_2=\dfrac{4(x_0-1)}{y_0-4}$，

所以$y_2=\dfrac{4(x_0-1)}{y_0-4}-y_0=\dfrac{4x_0-4-y_0^2+4y_0}{y_0-4}$，又因为$y_0^2=4x_0$，所以$y_2=\dfrac{4(y_0-1)}{y_0-4}$，

代入$y^2=4x$，得到$x_2=\dfrac{4(y_0-1)^2}{(y_0-4)^2}$，所以$C(\dfrac{4(y_0-1)^2}{(y_0-4)^2},\dfrac{4(y_0-1)}{y_0-4})$，

所以直线BC的斜率为$k=\dfrac{\dfrac{4(y_0-1)}{y_0-4}-\dfrac{4}{y_0}}{\dfrac{4(y_0-1)^2}{(y_0-4)^2}-\dfrac{4}{y_0^2}}=\dfrac{\dfrac{(y_0-1)}{y_0-4}-\dfrac{1}{y_0}}{\left(\dfrac{y_0-1}{y_0-4}\right)^2-\dfrac{1}{y_0^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{(y_0-1)}{(y_0-4)}+\dfrac{1}{y_0}}=\dfrac{y_0(y_0-4)}{y_0^2-4}$，

所以BC的方程为$y-\dfrac{4}{y_0}=\dfrac{y_0(y_0-4)}{y_0^2-4}(x-\dfrac{4}{y_0^2})$，

即$y=\dfrac{y_0(y_0-4)}{y_0^2-4}x-\dfrac{4(y_0-4)}{y_0(y_0^2-4)}+\dfrac{4}{y_0}=\dfrac{y_0(y_0-4)}{y_0^2-4}x-\dfrac{4}{y_0}\cdot\dfrac{(y_0-y_0^2)}{(y_0^2-4)}=\dfrac{y_0(y_0-4)}{y_0^2-4}x-\dfrac{4(1-y_0)}{(y_0^2-4)}$

所以$y=\frac{y_0^2-4y_0}{y_0^2-4}x-\frac{y_0^2-4y_0+4-y_0^2}{y_0^2-4}=\frac{y_0^2-4y_0}{y_0^2-4}(x-1)+1$，即$y-1=\frac{y_0^2-4y_0}{y_0^2-4}(x-1)$，

故直线BC过定点$N(1,1)$，令$y=0$，得到$x=\frac{4(1-y_0)}{y_0^2-4y_0}$，所以$D(\frac{4(1-y_0)}{y_0^2-4y_0},0)$，

所以$|OD|=\left|\frac{4(1-y_0)}{y_0^2-4y_0}\right|$，$|DE|=\left|\frac{4(1-y_0)}{y_0^2-4y_0}-1\right|=\left|\frac{4-y_0^2}{y_0^2-4y_0}\right|$，又因为$x_0>1,y_0<0$，所以$y_0^2=4x_0>4$，

所以$|OD|=\frac{4(1-y_0)}{y_0^2-4y_0}$，$|DE|=\frac{y_0^2-4}{y_0^2-4y_0}$，又$|OD|=a,|DE|=b$，所以

$a+b=\frac{4(1-y_0)}{y_0^2-4y_0}+\frac{y_0^2-4}{y_0^2-4y_0}=1$，

又由柯西不等式知

$(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+3})\left[(a+1)+(b+3)\right]=\left[(\frac{a}{\sqrt{a+1}})^2+(\frac{b}{\sqrt{b+3}})^2\right]\left[(\sqrt{a+1})^2+(\sqrt{b+3})^2\right]\geq(a+b)^2$，

当且仅当$\frac{a}{a+1}=\frac{b}{b+3}$，即$a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$时，取等号，

所以$(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+3})\times 5\geq 1$，即$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+3}\geq\frac{1}{5}$，

故选：D.

【点睛】解决本题的关键在于，利用条件求出$B(\frac{4}{y_0^2},\frac{4}{y_0})$，$C(\frac{4(y_0-1)^2}{(y_0-4)^2},\frac{4(y_0-1)}{y_0-4})$两点，再利用点斜式表示出直线$BC$，进而求出定点$N$.

二、多选题

9．将函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标保持不变，得到函数$g\left(x\right)$的图象，则关于$g\left(x\right)$的说法正确的是（　）

A．最小正周期为2π　　　　B．偶函数

C．在$\left(\frac{9}{4}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$上单调递减　　　　D．关于$\left(\frac{2k-1}{8}\pi,0\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$中心对称

【答案】BCD

【分析】A 选项，根据辅助角公式，平移和伸缩变换得到$g\left(x\right)=-2\cos 4x$，从而得到$T=\frac{2\pi}{\left|\omega\right|}$的最小正周期；B 选项，由函数奇偶性定义得到 B 正确；C 选项，由$\frac{9\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{2}$得到$9\pi<4x<10\pi$，由整体法得到函数的单调性；D 选项，$g\left(\frac{2k-1}{8}\pi\right)=-2\cos\frac{2k-1}{2}\pi=0$，故 D 正确.

【详解】A 选项，$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$f\left(x\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到

$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x$，

再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标保持不变，得到$g\left(x\right)=-2\cos 4x$，

所以$g\left(x\right)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，A 错误；

B 选项，$g\left(x\right)=-2\cos 4x$的定义域为 R，且$g\left(-x\right)=-2\cos\left(-4x\right)=-2\cos 4x$，

故$g\left(x\right)=-2\cos 4x$是偶函数，B 正确；

C 选项，由$\frac{9\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{2}$得$9\pi<4x<10\pi$，

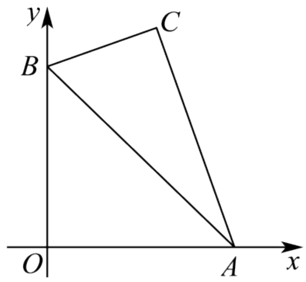
由于$y=-2\cos z$在$z\in\left(9\pi,10\pi\right)$上单调递减，

所以$g\left(x\right)$在$\left(\frac{9}{4}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$上单调递减，C 正确；

D 选项，$g\left(\frac{2k-1}{8}\pi\right)=-2\cos\frac{2k-1}{2}\pi=0$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 D 选项正确.

故选：BCD.

10．如图，在平面直角坐标系中，直角三角形ABC中，$B=\frac{\pi}{3}$，它的两个锐角的顶点A和B分别在x正半轴、y正半轴上滑动，则下列结论正确的是（　　）



A．点 C 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上　　B．点 C 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上

C．点 C 的轨迹长度等于 AC　　D．点 C 的轨迹长度等于 BC

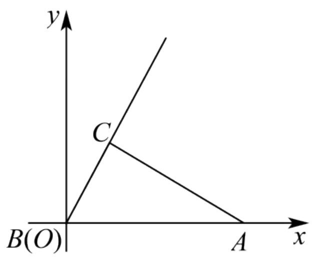
【答案】BD

【分析】由题可得 A,O,B,C 四点共圆，可得 $\angle AOC=\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，可判断 A，B；当 B 与 O 重合时，此时 $|OC|$ 最小，当 BC 垂直于 y 轴时，$|OC|$ 等于 A,O,B,C 四点共圆的圆的直径 $|AB|$，此时 $|OC|$ 最大，可判断 C，D.

【详解】由题可得 A,O,B,C 四点共圆，所以 $\angle AOC=\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，所以直线 OC 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以点 C 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，故 A 错误，B 正确；

当 B 与 O 重合时，此时 $|OC|$ 最小，$|OC|=|BC|$，



当 BC 垂直于 y 轴时，$|OC|$ 等于 A,O,B,C 四点共圆的圆的直径 $|AB|$，此时 $|OC|$ 最大，

$|OC|=2|BC|$，

所以点 C 的轨迹长度为 $2|BC|-|BC|=|BC|$，故 C 错误，D 正确.